

# الإحصاء الوصفي والتحليلي مع استخدام البرامج الجاهزة

تأليف

الدكتور  
محمد عبدالهادي المحميد

الدكتور  
عبدالحميد محمد نجم

جامعة الكويت

الطبعة الاولى  
١٩٨٨م - ١٤٠٨هـ



# **الإحصاء الوصفي والتحليلي مع استخدام البرامج الجاهزة**

**تأليف**

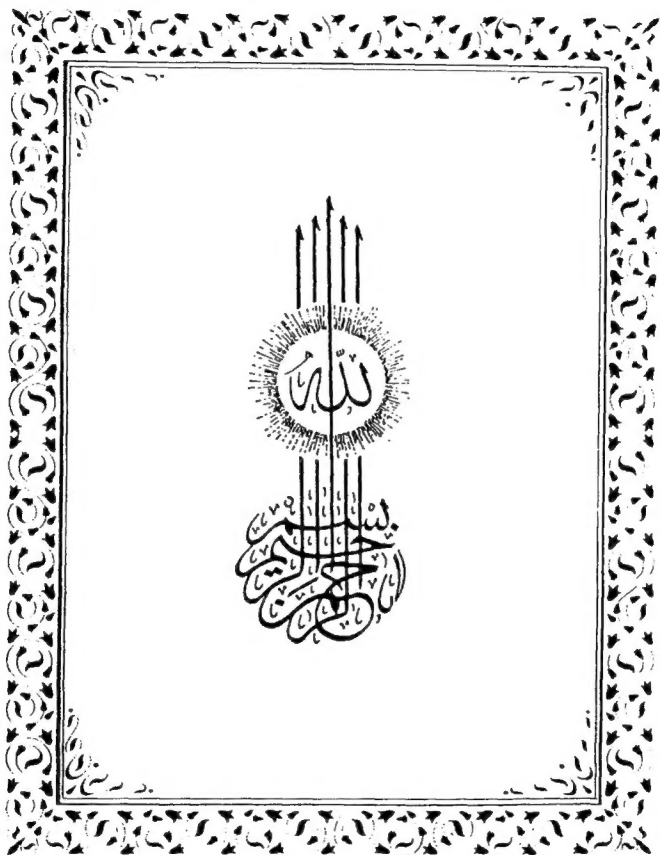
**الدكتور  
محمد عبد الهادي الحميد**

**الدكتور  
عبد الحميد محمد نجم**

حقوق الطبع والنشر محفوظة للمؤلفان

الطبعة الأولى

١٩٨٨





## « مقدمة »

يهدف هذا الكتاب إلى عرض لمبادئ علم الاحصاء بأسلوب مبسط وإلى تعميق وشرح المقاييس الاحصائية المختلفة ، وكذلك إلى دراسة بعض طرق التحليل الاحصائي بالإضافة إلى توضيح استخدام البرامج الجاهزة في تحليل البيانات الاحصائية وذلك لمواكبة التطور الذي طرأ في هذا المجال .

ويجانب اهتمامنا بالمساهمة في موضوعات هذا الكتاب ليخدم القارئ المستخدم للأسلوب الاحصائي في تحليل البيانات إلا أننا راعينا أن نخدم فصول هذا الكتاب مقررين أساسيين من مقررات الاحصاء والتي تقدمها كليات التجارة وهي :

١ - الاحصاء الوصفي

٢ - الاحصاء للتجارين ( الاحصاء التطبيقي ) .

ويمكن تقسيم هذا الكتاب إلى ثلاثة أجزاء رئيسية :

أ - المقدمة مع التحليل الاحصائي لمتغير واحد ويشتمل هذا الجزء على الفصول الستة الأولى وهي المقدمة ، التوزيعات التكرارية ، التمثيل البياني ، مقاييس النزعة المركزية ، مقاييس التشتت والالتواء بالإضافة إلى الأرقام القياسية حيث تمثل تطبيقاً على مقاييس النزعة

المركزية لأنها تهتم بمتغير واحد فقط كالأسعار أو الكميات أو الأوزان ( القيم ) .

ب - التحليل الاحصائي في حالة متغيرين ، ويشتمل على بقية فصول الكتاب وهي موضوعات الارتباط ، والانحدار الخطي ، تحليل السلاسل الزمنية ، مبادئ نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية ثم تقدير فترات الثقة واختبارات الفروض الاحصائية .

ج - استخدام البرامج الجاهزة في تحليل البيانات الاحصائية في الفصل الأخير من الكتاب .

ولقد راعينا أن يكون الكتاب موجزاً بحيث يتناسب مع الوقت المخصص لهذه الموضوعات وأن يكون بسيطاً ومدعماً بالأمثلة التطبيقية حتى يتيسر فهمه ويتمشى مع مستوى استعداد القارئ في الأساليب الرياضية .

ولا يفوتنا أن نقدم الشكر إلى لجنة البحوث والتدريب بكلية التجارة جامعة الكويت على مساهمتها الجزئية في إصدار الطبعة الأولى من هذا الكتاب .

والله ولي التوفيق ،

الكويت ١٩٨٨



## الفهرس

### الفصل الاول : مقدمة

#### الصفحة

- ٧ ..... تعريف علم الاحصاء
- ١٠ ..... مراحل البحث الاحصائي
- ١٧ ..... أنواع العينات
- ٢٢ ..... - أنواع الاخطاء
- ٢٤ ..... - خصائص مجموع عدد من المقدرات
- ٢٦ ..... - تمارين الفصل الاول

### الفصل الثاني : التوزيعات التكرارية

- ٢٩ ..... - مقدمة
- ٣٢ ..... - التوزيعات التكرارية البسيطة
- ٥١ ..... - التوزيعات التكرارية المزدوجة
- ٥٥ ..... - التوزيعات التكرارية النسبية
- ٥٨ ..... - تمارين الفصل الثاني

### الفصل الثالث : التمثيل البياني

- ٦٣ ..... - مقدمة
- ..... - التمثيل البياني للبيانات غير المبوبة
- ٦٤ ..... \* الاعمدة او المستطيلات
- ٧١ ..... \* الدوائر
- ٧٤ ..... \* الخط البياني
- ..... - التمثيل البياني للبيانات المبوبة
- ٧٨ ..... \* المدرج التكراري
- ٨٢ ..... \* المضلع التكراري
- ٨٥ ..... \* المنحنى التكراري
- ٨٨ ..... \* المنحنيات التكرارية المتجمعة
- ٩١ ..... - تمارين الفصل الثالث

٩٥	..... مقدمة
٩٧	..... الوسط الحسابي
١١٢	..... الوسيط
١١٨	..... المنوال
١٢٤	..... الوسط الهندسي
١٢٧	..... الوسط التوافقي
١٣٠	..... المقارنة بين المتوسطات
١٣٣	..... تمارين الفصل الرابع

#### الفصل الخامس : مقاييس التشتت والالتواء

١٣٧	..... مقدمة
١٣٨	..... المدى
١٣٩	..... نصف المدى الربيعي
١٤٣	..... الانحراف المتوسط
١٤٧	..... الانحراف المعياري
١٦٠	..... معامل الاختلاف
١٦٢	..... مقاييس الالتواء
١٦٥	..... تمارين الفصل الخامس

#### الفصل السادس : الارقام القياسية

١٦٧	..... مقدمة وتعريف بالارقام القياسية
١٧٤	..... الرقم القياسي التجميعي البسيط
١٧٥	..... الرقم القياسي التجميعي المرجح
١٧٨	..... الرقم القياسي الأمثل
١٧٩	..... الرقم القياسي للمناسيب البسيطة والمرجحة

## الصفحة

- الأرقام القياسية بأساس متحرك ..... ١٨٦
- اختبار الأرقام القياسية ..... ١٩٠
- تمارين الفصل السادس ..... ١٩٤

## الفصل السابع : الارتباط

- مقدمة ..... ١٩٩
- أشكال الانتشار ..... ١٩٩
- الارتباط الخطي للبيانات غير المبوية ..... ٢٠٢
- ارتباط الرتب ..... ٢١١
- الارتباط الخطي للبيانات المبوية ..... ٢١٦
- الارتباط بين الظواهر الوصفية ..... ٢٢١
- معامل التوافق ..... ٢٢١
- معامل الاقتران ..... ٢٢٤
- ح الارتباط المتعدد ..... ٢٢٦
- ع الارتباط الجزئي ..... ٢٢٧
- تمارين الفصل السابع ..... ٢٣٠

## الفصل الثامن : الانحدار الخطي

- إ- الانحدار الخطي البسيط ..... ٢٣٥
- معامل التحديد ..... ٢٤٣
- الخطأ المعياري للتقدير ..... ٢٤٧
- ح الانحدار الخطي المتعدد ..... ٢٥١
- تمارين الفصل الثامن ..... ٢٦١

## الفصل التاسع : تحليل السلاسل الزمنية

- تعريف السلسلة الزمنية ..... ٢٦٥
- عناصر السلسلة الزمنية ..... ٢٦٧

## الصفحة

- طرق تعيين خط الاتجاه العام :	
* طريقة التمهيد البياني	٢٧٣
* طريقة شبه المتوسطات	٢٧٥
* طريقة المربعات الصغرى	٢٧٧
* طريقة المتوسطات المتحركة	٢٩٣
- استبعاد اثر الاتجاه العام	٢٩٨
- قياس التغيرات الموسمية :	
* طريقة المتوسطات البسيطة	٢٩٩
* طريقة نسبة القيم الاصلية الى المتوسطات المتحركة	٣٠٢
- استبعاد اثر التغيرات الموسمية	٣٠٧
- قياس التغيرات الدورية	٣٠٨
- تمارين الفصل التاسع	٣٠٩

## الفصل العاشر: مبادئ نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية

- التجربة العشوائية	٣١٣
- تعريف الاحتمال	٣١٦
- قانون جمع الاحتمالات	٣٢٥
- قانون ضرب الاحتمالات	٣٢٨
- الاحتمال الشرطي	٣٢٩
- التوزيعات الاحتمالية	٣٣٣
* التوزيع الطبيعي	٣٤٦
* توزيع مربع كاي	٣٥٥
* توزيع ت	٣٥٩
* توزيع ف	٣٦٢
- تمارين الفصل العاشر	٣٦٦

## الفصل الحادي عشر: تقدير فترات الثقة واختبارات الفروض الاحصائية

- مقدمة ..... ٣٦٩
- تقدير فترات الثقة للقيمة المتوقعة للمجتمع ..... ٣٧١
- تقدير فترات الثقة لنسبة الحدوث في المجتمع ..... ٣٧٥
- اختبارات الفروض الاحصائية للقيمة المتوقعة للمجتمع ..... ٣٨٢
- اختبارات الفروض الاحصائية للقيمة المتوقعة لمجتمعين مستقلين ..... ٣٩٠
- اختبارات الفروض الاحصائية لنسبة ظاهرة ما في المجتمع ..... ٤٠٠
- اختبارات الفروض الاحصائية لتساوي نسبة الحدوث لمجتمعين مختلفين ..... ٤٠٣
- اختبارات الفروض الاحصائية لتباين المجتمع ..... ٤٠٦
- اختبارات الفروض الاحصائية لتباين مجتمعين مختلفين ..... ٤٠٩
- تمارين الفصل الحادي عشر ..... ٤١٨

## الفصل الثاني عشر: استخدام البرامج الاحصائية الجاهزة في تحليل البيانات

- استخدام برنامج MICROSTAT في ادخال وتعديل البيانات ..... ٤٢٤
- استخدام برنامج MICROSTAT في تحليل البيانات ..... ٤٣٤
- \* المقاييس الاحصائية الوصفية ..... ٤٣٥
- \* تكوين الجداول التكرارية ..... ٤٤٠
- \* معامل الارتباط الخطي ..... ٤٤٢
- \* تحليل الانحدار الخطي ..... ٤٤٦
- استخدام SPSS في تحليل البيانات :
- \* ادخال البيانات ..... ٤٥٥
- \* حساب المقاييس الاحصائية الوصفية ..... ٤٥٦
- \* تكوين الجداول التكرارية ..... ٤٥٩
- \* معامل الارتباط الخطي ..... ٤٦٣
- \* تحليل الانحدار الخطي ..... ٤٦٥

٤٧٥	- جدول (١) جداول مساحات المنحنى الطبيعي المعياري
٤٧٦	- جدول (٢) جدول توزيع مربع كاي
٤٧٨	- جدول (٣) جدول توزيع ت
٤٧٩	- جدول (٤) جدول توزيع ف
٤٨٣	- المراجع

## الفصل الأول

### مقدمة

#### تعريف علم الاحصاء Statistics

إذا أخذنا الاستخدام كمعيار لتعريف علم الاحصاء فنجد أن هناك تعريفين أحدهما قديم والآخر حديث ، والتعريف القديم للاحصاء هو علم الحصر أو العد « Science of Counting » حيث كان هدف الدولة قديماً حصر عدد السكان وذلك لأغراض محددة مثل تحديد حجم دافعي الضرائب وتقدير حجم القوة البشرية التي يمكن استخدامها للدفاع عن أراضي الدولة . وهذا التعريف لا يختلف كثيراً عن التعريف الذي يستخدمه العامة حتى الآن حيث يُعرفون الاحصاء بأنه جمع بيانات عن المجموعات والظواهر المختلفة والتعبير عنها في صورة رقمية . ولكن جمع البيانات لا يكون غاية نسعى إليها ، بل ما هي في الواقع إلا وسيلة نبغي من ورائها تحقيق هدف معين ، وهذا الهدف يكون عادة وصف الظواهر المختلفة لدراسة طريقة تغيرها أو مقارنتها بظواهر أخرى بغية استنباط العلاقة التي تربط بينهم .

ومع استخدام الاحصاء الآن في جميع المجالات فلا نجد اليوم علماً لا يعتمد في تحليله على الأساليب الاحصائية وعليه نتفق مع الذين يعرفون علم الاحصاء بأنه أحد العلوم الاجتماعية الذي يبحث في أساليب جمع وعرض البيانات من أجل الوصول إلى نوع من المعرفة ( أو اتخاذ قرار معين ) المبنية على أسس رقمية للظاهرة محل الدراسة بمعنى أن علم

الاحصاء هو مجموعة الأساليب والنظريات العلمية التي تهدف إلى جمع وتلخيص ووصف وتحليل البيانات عن الظواهر المختلفة واستخدام النتائج في التنبؤ واتخاذ القرار .

ومع تطور الرياضيات ونظرية الاحتمالات في منتصف القرن الثامن عشر أصبح علم الاحصاء يمتلك من الأسس والمبادئ والنظريات المختلفة التي تساعد في التخطيط ورسم السياسات واتخاذ القرارات في شتى المجالات ومعها تطور علم الاحصاء من علم وصفي يقوم بجمع وعرض البيانات إلى علم تحليلي يقوم على التنبؤ بقيم الظواهر في المستقبل وتقدير واستنباط خصائص المجتمع عن طريق سحب عينة من هذا المجتمع ودراسة خصائصها وتعميم نتائجها على المجتمع مما يوفر الوقت والتكاليف .

ومع تطور استخدام الكمبيوتر وانتشار الحاسب الشخصي والبرامج الجاهزة Software أصبح من الميسور على كثير من غير المتخصصين في الاحصاء استخدام الأساليب الاحصائية سواء في تحليل البيانات وحساب المقاييس المختلفة التي تساعد على التنبؤ واتخاذ القرار العلمي السليم .

ومن ثم يمكن تقسيم علم الاحصاء إلى قسمين أساسيين :

#### الاحصاء الوصفي Descriptive Statistics :

وهو الذي يقوم على جمع وعرض البيانات بغرض اظهار خصائصها المختلفة .

#### الاحصاء التحليلي أو الاستدلالي Statistical Inference :

وهو الذي يقوم على تعميم نتائج الجزء على الكل . عن طريق استخدام جزء من المجموعة ودراسة خصائصها ، ثم تقدير واستنتاج



خصائص المجموعة كلها باستخدام تلك النتائج التي حصلنا عليها من العينة .

وسوف تتركز دراستنا على الاحصاء الوصفي التي تبدأ بعملية جمع البيانات ووسائل تحليلها سواء باستخدام الجداول التكرارية أو الرسوم البيانية ، أو أحد المقاييس الاحصائية سواء كنا نعالج متغيراً واحداً أو متغيرين .

أما بالنسبة للاحصاء الاستدلالي فسوف نستعرض بعض أدواته في التحليل مثل التوزيعات الاحتمالية واختبارات الفروض الاحصائية هذا بالإضافة إلى بعض الدراسات التطبيقية التي تخدم القارئ في مجالات مختلفة . وهناك فصل خاص عن استخدام البرامج الجاهزة في حل المشاكل الاحصائية والذي يغطي التطور الذي طرأ في هذا المجال .

## مراحل البحث الاحصائي

سوف نلخص في هذه المرحلة الخطوات الرئيسية التي يجب أن يفكر فيها أي باحث عند إجراء بحث معين يهدف من وراء القيام به دراسة تأثير مؤثر أو عدة مؤثرات على ظاهرة معينة وعلاقة ذلك بالظواهر الأخرى وأمثلة ذلك الدراسات السكانية التي تقوم على دراسة معدلات الخصوبة ودراسة علاقته بالمستوى الثقافي والتعليمي كذلك أبحاث رجال التأمين لدراسة مدى اقبال الناس على التأمين على الحياة وعلاقة ذلك بمستوى الوعي الثقافي والحضاري ودخل الفرد .

وتتلخص مراحل البحث الاحصائي فيما يلي :

### أ - تحديد الهدف من البحث أو وضع الفروض الاحصائية :

المقصود بالفرض هو تفسير مبدئي للظاهرة موضع الدراسة والذي يحتاج بدوره إلى بيانات يتم جمعها وتحليلها وفي ضوء ذلك يقرر الباحث إما قبول الفرض قبولاً كلياً أو جزئياً واما رفض الفرض والبحث عن فرض بديل آخر يحل محل الفرض المفروض وذلك على ضوء البيانات التي جمعت عن الظاهرة .

وواضح أن وضع الفروض أو تحديد الهدف من الدراسة وكذلك تحديد هياكل الجداول الاحصائية المطلوبة يساعد على تحديد البيانات Data الواجب جمعها مع الأخذ في الاعتبار الميزانية المخصصة للبحث .

ب - تحديد المجتمع المراد جمع البيانات عنه وكذلك وحدة المجتمع التي يجب أن يؤخذ عنها البيانات :

المجتمع في الاحصاء هو مجموع المفردات التي يجب أن تجمع منها البيانات ، والمفردات التي تمثل وحدة جمع البيانات قد تكون أسرة أو فرداً أو حيازة أو مبنى . فمثلاً عند دراسة التعداد السكاني فمجموع السكان ذكوراً وإناثاً يشكل المجتمع موضع الدراسة ووحدة المجتمع هي الفرد الواحد ، كذلك عند تقدير مجموع الحيازات الزراعية فإن مجموع الأراضي المزروعة هي مجتمع الدراسة اما وحدة المجتمع فهي الفدان ( إذا كان الفدان هو وحدة القياس ) .

ج - تحديد المصادر التي نستقي منها البيانات :

هناك نوعان من مصادر البيانات :

(١) مصادر غير مباشرة أو مصادر تاريخية :

وهي التي تأتي من سجلات محفوظة عن ظواهر سبق جمع بيانات عنها ومسبق نشرها ويجب أن يتوافر في المصادر التاريخية الشروط التالية :

- يجب أن يشار إلى المصدر وأن يكون المصدر موثوق به

- يجب أن نحيط بالظروف التي جمعت فيها البيانات والمفاهيم التي استخدمت وكذلك الأسلوب الذي أتبع في جمع البيانات .

(٢) مصادر مباشرة أو المصادر الميدانية :

إذا لم تتوافر المصادر التاريخية عن الظاهرة موضع الدراسة نقوم بجمع البيانات عنها من مصادرها الأصلية وذلك إما عن طريق المقابلة الشخصية أو البريد أو التليفون أو . . .

#### د - التحضير للعملية الميدانية :

عملية الاعداد لجمع البيانات من الميدان عملية كبيرة تأخذ عدة مراحل أهمها :

##### (١) تصميم صحيفة الاستبانة أو الاستمارة :

ويجب أن يراعى فيها الشروط التالية :

- أن تكون شاملة على جميع البيانات اللازمة للدراسة .
- أن يراعى التسلسل المنطقي وأن تصاغ الأسئلة بصورة سلسلة .
- أن يكون عدد الأسئلة محدوداً ومركزاً .
- أن تكون الأسئلة واضحة وبعيدة عن الغموض .
- محاولة أن تكون معظم الأسئلة بحيث تكون الإجابة عليها بصورة رقمية أو بنعم أو لا والابتعاد بقدر الامكان عن الأسئلة التي تؤدي إلى إجابات وصفية .
- أن تبعد الأسئلة عن الإحراج .
- الإقرار على سرية البيانات المعطاة وألا تستخدم إلا لغرض البحث فقط .

##### (٢) تحديد الأسلوب المناسب لجمع البيانات :

وهناك أسلوبان لجمع البيانات :

- أسلوب الحصر الشامل : وبمقتضاه يتم جمع البيانات من جميع مفردات المجتمع موضع الدراسة .

– أسلوب العينة : ويمقتضاه يتم جمع البيانات من بعض مفردات المجتمع .

ويعتمد اختيار أسلوب جمع البيانات على عوامل متعددة أهمها :

#### ١ – طبيعة المجتمع :

إذا كان المجتمع محدوداً Finite أي يمكن حصر مفرداته بسهولة ويسر يمكن استخدام أسلوب الحصر الشامل .

أما إذا كان المجتمع غير محدود Infinite أي لا يمكن حصر جميع مفرداته فنستخدم أسلوب العينة .

#### ٢ – طبيعة الظاهرة موضع الدراسة :

إذا كانت مفردات المجتمع تفني أو ت تلف نتيجة للاختبار فلا مفر من استخدام أسلوب العينة والأمثلة على ذلك كثيرة منها تحليل الدم البشري لمجموعة من المرضى أو عند دراسة صلاحية شحنة من المتفجرات أو الطلقات النارية المستوردة قبل تخزينها .

#### ٣ – عنصر الوقت :

أسلوب الحصر الشامل يحتاج إلى وقت كبير إذا ما قورن بأسلوب العينة فإذا كنا في عجلة من الوقت للوصول إلى النتائج فقد يرجح عنصر الوقت استخدام أسلوب العينة بدلاً من أسلوب الحصر الشامل .

#### ٤ - الامكانيات الفنية والمادية المتاحة للبحث :

يستلزم اتباع أسلوب الحصر الشامل توافر الموارد المالية كذلك الاشخاص المدربين على جمع وتبويب وتحليل البيانات وعليه إذا كانت الامكانيات المادية والفنية محدودة فلا مفر من استخدام أسلوب العينة .

ولتوضيح هذه الفكرة نفترض أنه لإجراء بحث معين بميزانية تقديرية ١٠٠٠٠٠٠ جنيه بالإضافة إلى مجموعة من الخبراء والمدربين تقدر بحوالي ١٠٠ شخص . وبإجراء بحث استطلاعي على عينة من هذا المجتمع لتحديد الأسلوب المناسب وجد أنه لإجراء هذا البحث باتباع أسلوب الحصر الشامل فيلزم ٥٠٠٠٠٠٠ جنيه وقوة بشرية مدربة تقدر بحوالي ٥٠٠ شخص . من ذلك نجد أنه يستحيل إجراء هذا البحث باتباع أسلوب الحصر الشامل ويلزم تطبيق أسلوب العينة على خمس المجتمع على الأكثر .

#### (٣) إعداد جهاز الافراد الذي يتولى جمع وإعداد البيانات :

وتمثل ذلك في اعداد الافراد القائمين على عملية جمع البيانات وتوعيتهم بالهدف من إجراء البحث وبالأسئلة المدونة في استمارة البحث وكيفية التعامل مع الجمهور ويتم ذلك عن طريق الندوات والمعسكرات التي تقام من أجل هذا الغرض ويتم في هذه المرحلة تقسيم هذا الجهاز إلى جامعي البيانات - مراجعون - مشرفون . . . وتحديد اختصاصات كل منهم .

#### (٤) تهيئة المجتمع للعملية الميدانية :

ويتم ذلك عن طريق وسائل الإعلام المختلفة كالإذاعة والراديو والتلفزيون والصحف والندوات في المساجد والكنائس والملصقات حتى نضمن تعاون المجتمع وكسب ثقته في إعطاء بيانات سليمة .

#### هـ - تصنيف وتجهيز البيانات :

بعد إتمام جمع البيانات من الميدان تأتي مرحلة استخراج الجداول الاحصائية والتي تتم على عدة مراحل :

##### (١) مراجعة استمارات البحث مكتبياً :

بغرض التأكد من الاعداد الصحيحة للاستمارات ومن أن جميع الأسئلة قد تمّ الإجابة عليها بطريقة واضحة ومتسقة وفي هذه المرحلة قد يتم إعادة ملء الاستمارات لعينة محدودة من المفردات باستخدام جامعي بيانات أكثر خبرة للتأكد من دقة البيانات ومطابقة النتائج .

##### (٢) التجهيز الآلي للبيانات :

في حالة الأبحاث الكبيرة مثل تعداد السكان فإننا نستخدم الآلات الحاسبة الالكترونية في تصنيف البيانات وتتم على مرحلتين :

١ - عملية الترميز : بمعنى استبدال الاجابات الوصفية بالاستمارة إلى رموز رقمية تساعد على تفريغ البيانات وترجمتها على بطاقات الشقيب .

٢ - عملية التثقيب : وتمثل في نقل الاجابات الرمزية على

بطاقات تسمى بطاقات التثقيب . وحاليا يتم نقل الاجابات

الرمزية إلى الكمبيوتر مباشرة بدون المرور بعملية التثقيب .

(٣) فرز وتبويب البيانات :

وتتم هذه العملية لاستخراج الجداول الاحصائية يدوياً إذا

كان حجم البيانات محدوداً وآلياً إذا كان حجم البيانات غير

محدود باستخدام البطاقات المثقبة مع آلات الفرز والتبويب أو

باستخدام الكمبيوتر .

و - عرض البيانات وتحليلها : ويشمل : -

١ - التمثيل البياني للبيانات .

٢ - تلخيص البيانات في صورة مقاييس إحصائية مثل مقاييس

الموضع والتشتت .

٣ - إجراء بعض الاختبارات الاحصائية للوصول إلى قرار بقبول أو

رفض الفروض التي افترضت كتفسير مبدئي للظاهرة .



## أنواع العينات

العينة Sample هي جزء يختار بطريقة معينة للحصول على معلومات لتوضيح خصائص المجتمع Population الذي سحبت منه هذه العينة . ويتضح أن هذا الأسلوب في التعرف على خصائص المجتمع يوفر الكثير من الوقت والتكاليف. ولسحب العينة يجب أن يتوافر الإطار Frame وهو الوسيلة التي تمكّننا من الوصول إلى كل مفردة من مفردات المجتمع ( جميع وحدات المعاينة ) وقد يكون الإطار قائمة بالأسماء أو خريطة أو أي وسيلة أخرى تحتوي على جميع وحدات المجتمع موضع الدراسة ويجب أن يتوافر في الإطار الشروط التالية :

- (١) الوضوح في تعريف المجتمع .
- (٢) عدم التكرار لأي مفردة من مفردات المجتمع .
- (٣) الشمول لكل مفردات المجتمع .

وهناك طرق عديدة لاختيار العينات أهمها :

### ١ - العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample :

هي أبسط أنواع العينات ويتم بإحدى طرق الاختيار العشوائي . ومبدأ العشوائية يعني إعطاء كل مفردة من مفردات المجتمع نفس الفرصة في الاختيار أو الظهور في العينة .

ولتوضيح ذلك نفترض أن لدينا مجتمعاً مكوناً من ١٠٠ مفردة ونريد سحب عينة من ١٠ مفردات مع إعطاء كل مفردة نفس الفرصة في الاختيار ويمكننا تحقيق ذلك بعدة طرق أهمها :

– تعطى كل مفردة من مفردات المجتمع رقماً مسلسلاً نضعه على قصاصات متساوية من الورق أو بطاقات صغيرة فيكون لدينا مائة بطاقة متماثلة ونخلط هذه البطاقات جيداً ثم نسحب ١٠ بطاقات واحدة بعد الأخرى سواء بطريقة السحب مع الإعادة أو السحب مع عدم الإعادة فنحصل على العينة المطلوبة .

– نفس الطريقة نتبعها ولكن باستخدام كرات صغيرة متماثلة في الحجم تكتب عليها الأرقام المسلسلة وتخلط جيداً في كيس ونسحب الكرات العشر .

ويلاحظ أن هذه الطرق سهلة الاستخدام طالما كان حجم المجتمع صغيراً ولكن في حالة المجتمعات الكبيرة يستحيل استخدام هذه الطرق اليدوية ونلجأ إلى استخدام جداول الأرقام العشوائية التي أعدت خصيصاً لهذا الغرض كذلك يمكن استخدام الآلات الحاسبة الالكترونية في سحب مثل هذه العينات .

ويلاحظ أن العينة العشوائية البسيطة تمتاز بسهولة اختيارها في حالة المجتمعات الصغيرة ولكن يعاب عليها صعوبة استخدامها في المجتمعات الطبقة حيث لا تضمن تمثيل كل طبقة من هذه الطبقات بنفس نسبتها في المجتمع .

## ٢ – العينة العشوائية المنتظمة **Systematic Random Sample** :

ويلاحظ أن العينة العشوائية المنتظمة تحتوي على عنصرين :

– عنصر العشوائية : ويظهر في اختيار المفردة الأولى .

– عنصر الانتظام : ويظهر في اختيار بقية المفردات .

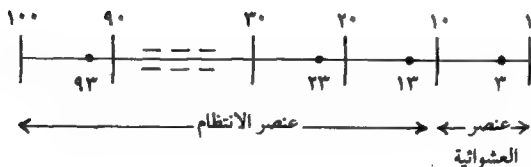
وهذا النوع من أنواع العينات يوفر أسلوباً بسيطاً لاختيار العينة بتكاليف ومجهود أقل من العينة العشوائية البسيطة .

وتتلخص خطوات سحب العينة العشوائية المنتظمة في تقسيم المجتمع إلى عدد من الفئات المتساوية الطول ومن المجموعة الأولى نختار مفردة عشوائية باتباع الأسلوب السابق في العينة العشوائية البسيطة ونحدد ترتيبها في المجموعة ثم نحصل على بقية المفردات بإضافة طول الفئة على التوالي كما يتضح من المثال التالي :

بافتراض المثال السابق والذي يتضمن اختيار عينة من ١٠ مفردات من مجتمع حجمه ١٠٠ مفردة ، في هذه الحالة نقسم المجتمع إلى ١٠ مجموعات متساوية كل مجموعة مكونة من ١٠ مفردات ، وباتباع الطريقة العشوائية على مفردات المجموعة الأولى نسحب مفردة ونفترض أن لها الترتيب «٣» ونستطيع تحديد بقية مفردات العينة بإضافة طول الفئة (١٠) على التوالي . فتكون المفردة الثانية ١٣ والثالثة ٢٣ وهكذا ...

أي أن العينة هي ٣ ، ١٣ ، ٢٣ ، ... ، ٩٣

يمكن توضيحها بالرسم التالي :



ويتضح من المثال السابق انه يسهل اختيار العينة العشوائية المنتظمة بمجرد تحديد طول الفئة واختيار المفردة الأولى من بين مفردات المجموعة الأولى بالطريقة العشوائية . كما يتضح أن هذا الأسلوب يسهل استخراج العينة من السجلات .

### ٣ - العينة الطبقة Stratified Sample :

يفضل استخدام فكرة العينة الطبقة إذا كان المجتمع غير متجانس ويمكن تقسيمه إلى طبقات متجانسة حيث يمكن اختيار عينة تمثل المجتمع تمثيلاً صادقاً وذلك لأنها تأخذ في الاعتبار جميع الطبقات بحسب حجم كل منها .

ولتوضيح فكرة العينة الطبقة نفترض مجتمعاً مكوناً من ١٠٠ فرد بينهم ٤٠ ذكر و ٦٠ أنثى ونريد سحب عينة من ٢٠ فرداً بحيث يراعى حجم كل طبقة . في هذه الحالة نسبة الذكور إلى الاناث ٤ : ٦ وبالتالي يجب أن تشمل العينة ٨ ذكور و ١٢ أنثى ويتم ذلك باختيار ٨ ذكور من بين ٤٠ وأيضاً ١٢ أنثى من بين ٦٠ وذلك بطريقة العينة العشوائية البسيطة أو العينة العشوائية المنتظمة .

### ٤ - العينة متعددة المراحل Multi - Stage Sample :

هي العينة التي نصل فيها إلى كل مفردة من مفردات جمع البيانات على مرحلتين أو أكثر .

ولتوضيح هذا النوع من أنواع العينات نفترض أننا نريد إجراء تعداد سكاني باستخدام أسلوب العينة في مصر ( كما حدث في عام ١٩٦٦ ) فنبداً أولاً باختيار عدد من المحافظات من بين محافظات مصر ثم اختيار عدد من مراكز هذه المحافظات ثم اختيار عدد من قرى هذه المراكز ومن ثم اختيار مفردات عينة البحث .

يتضح من المثال السابق أننا توصلنا إلى مفردات العينة بعد أربع  
مراحل :

المرحلة الأولى : اختيار عدد من المحافظات

المرحلة الثانية : اختيار عدد من المراكز

المرحلة الثالثة : اختيار عدد من المدن والقرى

المرحلة الرابعة : اختيار مفردات العينة

ويستخدم أسلوب العينة متعددة المراحل كثيراً في مجال الزراعة  
حيث يستخدم هذا الأسلوب في تقدير متوسط الانتاج من محصول  
معين وفي التعدادات الزراعية المختلفة .

## أنواع الأخطاء

أتضح من عرضنا السابق أن هناك أسلوبين لجمع البيانات هما أسلوب الحصر الشامل وأسلوب العينة . وفي الواقع فإننا نصل إلى تقديرات دقيقة عن المجتمع باستخدام أسلوب الحصر الشامل على عكس أسلوب العينة حيث نتوقع عند استخدامه أخطاء تسمى بأخطاء المعاينة . وهناك أخطاء من نوع آخر تسمى بأخطاء التحيز يمكن أن يقع فيها الباحث سواء استخدم أسلوب الحصر الشامل أو أسلوب العينة وهي التي تصادفه خلال جميع مراحل البحث الاحصائي .

نخلص مما سبق أن هناك نوعين من الأخطاء هما : -

### ١ - أخطاء المعاينة Sampling Errors :

هي الأخطاء التي تنشأ نتيجة لعوامل صدفية بحتة من اختلاف نتائج أسلوب العينة عن نتائج أسلوب الحصر الشامل . وأخطاء المعاينة يمكن قياسها كمياً ومن ثم يمكن تقديرها تقديراً علمياً . ومن البديهي أن أخطاء المعاينة تقل كلما زاد حجم العينة وتلاشى تماماً إذا استخدمنا أسلوب الحصر الشامل وعليه فإنه يمكننا التحكم في أخطاء المعاينة عن طريق تغيير حجم العينة .

## ٢ - أخطاء التحيز Biases Errors :

هي الأخطاء التي يمكن أن يقع فيها الباحث خلال جميع مراحل البحث سواء استخدم أسلوب العينة أو أسلوب الحصر الشامل وتسمى أخطاء غير المعاينة . ومن أمثلة أخطاء التحيز ما يلي : -

- ١ - عدم الدقة في تعريف المجتمع موضع الدراسة وكذلك وحدة المجتمع .
- ٢ - عدم وضوح الرؤية في تحديد الفرض من إجراء البحث وتحديد المشكلة موضع الدراسة .
- ٣ - الاعتماد على مصادر غير دقيقة وغير موثوق بها في جمع البيانات .
- ٤ - أخطاء في استمارة البحث .
- ٥ - عدم اختيار الأسلوب المناسب لجمع البيانات .
- ٦ - الاعداد غير السليم لجامعي البيانات .
- ٧ - أخطاء في عملية جمع البيانات من مصادرها .
- ٨ - أخطاء في فرز وتبويب البيانات .
- ٩ - أخطاء في عرض البيانات وفي حساب المقاييس الاحصائية المختلفة .

## خصائص مجموع عدد من المفردات

سوف نحتاج لإثباتنا لبعض القوانين في الفصول التالية لبعض المصطلحات والعلاقات اللازمة لمجموع مفردات متغير واحد أو متغيرين .

أ - بالنسبة إلى متغير واحد :

إذا افترضنا متغيراً عشوائياً (س) وسحبنا عينة حجمها (ن) مفرداتها على التوالي هي :

$$s_1, s_2, \dots, s_n$$

فإن مجموع هذه القيم يرمز له بالرمز (مجم س) أي أن

$$\text{مجم س} = \sum_{r=1}^n s_r = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

وهناك خصائص عديدة للمجموع أهمها : -

(١) مجموع مفردات المتغير (س) مضروباً في مقدار ثابت يساوي المقدار الثابت مضروباً في مجموع مفردات المتغير أي أن :

$$\text{مجم أس} = \text{أ} \text{ مجم س}$$

حيث أ مقدار ثابت

(٢) مجموع مقدار ثابت عدد (ن) من المرات يساوي العدد مضروباً في المقدار الثابت أي أن :

$$\text{مجم أ} = \text{أ} \text{ ن}$$



(٣) مجموع المتغير مضافاً إليه ( أو مطروحاً منه ) مقدار ثابت  
يساوي مجموع المتغير مضافاً إليه ( أو مطروحاً منه ) عدد  
الحدود في المقدار الثابت أي أن :

$$\text{مج} (س \pm أ) = \text{مج} س \pm ن أ$$

(٤) مجموع مربعات قيم متغير لا يساوي مربع مجموع قيم هذا  
المتغير أي أن :

$$\text{مج} س^2 \neq (\text{مج} س)^2$$

ب - بالنسبة إلى متغيرين :

إذا افترضنا متغيراً عشوائياً آخر وليكن (ص) وسجبت عينه  
حجمها (ن) مفرداتها على النحو التالي :

$$ص_1, ص_2, \dots, ص_n$$

وباستخدام قيم المتغيرين (س، ص) يمكن إثبات العلاقات

التالية :

١ - مجموع قيم المتغيرين يساوي مجموع قيم المتغير الأول

مضافاً إليه مجموع قيم المتغير الثاني أي أن :

$$\text{مج} (س + ص) = \text{مج} س + \text{مج} ص$$

٢ - مجموع خارج قسمة متغيرين لا يساوي خارج قسمة مجموع

المتغيرين أي أن :

$$\text{مج} \left( \frac{س}{ص} \right) \neq \frac{\text{مج} س}{\text{مج} ص}$$

٣ - مجموع حاصل ضرب متغيرين لا يساوي حاصل ضرب

مجموع المتغيرين أي أن :

$$\text{مج} (س ص) \neq (\text{مج} س) (\text{مج} ص)$$

## تمارين الفصل الأول

- (١) تكلم عن أنواع العينات موضعاً مزايا وعيوب كل منها .
- (٢) فرق بين أسلوب الحصر الشامل وأسلوب العينة .
- (٣) عرّف علم الاحصاء ثم وضح الفرق بين الاحصاء الوصفي والاحصاء التحليلي .
- (٤) تكلم عن مصادر جمع البيانات .
- (٥) فرق بين العينة العشوائية المنتظمة والعينة الطبقية من حيث طريقة اختيارها ومزايا وعيوب كل منها .
- (٦) تكلم عن خطأ المعاينة وخطأ التحيز .
- (٧) إذا كان لدينا القيم التالية للمتغيرين ( س ، ص ) .

ص	س
١٠	٩
١٥	٧
١٢	٥
٢٠	٨
١٨	٦

(أ) احسب مجد س ، مجد ص ، مجد ٣ س ، مجد س<sup>٢</sup> ، مجد س ص ،  
مجد (س + ص) .

(ب) تحقق من صحة العلاقات الآتية :

$$(١) \text{مجد س}^٢ \neq (\text{مجد س})^٢ .$$

$$(٢) \text{مجد س ص} \neq (\text{مجد س}) (\text{مجد ص})$$

$$(٣) \text{مجد (س + ص)} = \text{مجد س} + \text{مجد ص}$$



## الفصل الثاني

### التوزيعات التكرارية

### FREQUENCY DISTRIBUTIONS

#### مقدمة

من استعراضنا لمراحل البحث الاحصائي في الفصل الأول نجد أنه بعد عملية جمع البيانات تكون في حوزتنا كميات هائلة من الأرقام وخاصة في حالة المجتمعات الكبيرة ولا نستطيع تفهم مدلولها أو تفسير خصائص المجتمع الذي سحبت منه . والخطوة التي تتلو ذلك هي عملية تلخيص وتبويب البيانات في صورة مجموعات أو فئات تعطي مدلولاً معيناً . فمثلاً إذا كان لدينا بيانات عن درجات مجموعة كبيرة من الطلبة في امتحان معين فلا نستطيع أن نتفهم تلك الدرجات واتجاهاتها إلا بعد ترتيب وتلخيص درجات الطلبة في صورة فئات تعكس التقديرات المختلفة ( ممتاز ، جيد جداً ، جيد ، مقبول ، راسب ) .

خلاصة القول أن عملية تفرغ البيانات في صورة توزيعات تكرارية هي خطوة لازمة حتى يمكن دراسة الظواهر التي يمكن أن تعكسها هذه البيانات وأيضاً كخطوة أولى لدراسة تلك الظواهر وعرضها بيانياً واستخراج المقاييس الاحصائية المختلفة . ونحصل على التوزيع أو الجدول التكراري بتلخيص البيانات الخام وتوزيعها على فئات ثم تحديد عدد التكرارات التي تناظر كل فئة .

ويجب أن تتوافر الشروط التالية عند تكوين الجداول التكرارية :

- (١) أن تهتم البيانات الموجودة بالجدول بموضوع واحد .
- (٢) وضع عنوان للجدول بحيث يعطي فكرة واضحة عن محتويات الجدول وأهميته بنظرة واحدة سريعة .
- (٣) أن يشير الجدول إلى مصدر أو مصادر البيانات لتوضيح صاحب الفضل في تجميع البيانات بالجدول والمسؤول عن الأخطاء الواردة به .
- (٤) أن يكون عدد فئات الجدول معقولاً بحيث لا يقل عن خمس ولا يزيد عن خمس عشر .
- (٥) أن نتحاشى استخدام الجداول التكرارية المفتوحة من أسفل أو من أعلى بقدر الامكان حتى لا يعرقل ذلك حساب بعض المقاييس الاحصائية .
- (٦) أن نتحاشى أيضاً الجداول التكرارية غير المنتظمة أي الجداول ذات الفئات غير المتساوية إلا في حالات الضرورة إذا لزم الأمر ذلك .
- (٧) أن تكون الفئات مستقلة وغير متداخلة بحيث تبدأ الفئة التالية من حيث تنتهي الفئة السابقة لها .

تحديد عدد الفئات :

المشكلة الأولى في تكوين الجدول أو التوزيع التكراري هي تحديد عدد الفئات الملائم وطول كل فئة تبعاً لذلك وتتلخص خطوات تحديد عدد الفئات على النحو التالي :

(١) تحديد الحد الأدنى والحد الأعلى للبيانات التي نريد وضعها في صورة جدول تكراري .

(٢) حساب المدى الذي تتوزع عليه هذه البيانات باستخدام العلاقة .

$$\text{المدى} = \text{الحد الأعلى} - \text{الحد الأدنى}$$

(٣) وبوضع عدد الفئات المناسب يمكن تحديد طول الفئة المناسب .

وهناك طريقة تفسيرية لتحديد عدد الفئات وذلك باستخدام القاعدة التالية :

$$\text{عدد الفئات} = 1 + 3,3 \log N$$

حيث  $N$  عدد القيم

فمثلاً إذا كان  $N = 100$  فإن

$$\text{عدد الفئات} = 1 + 3,3 \log 100 = 1 + 3,3 \times 2 = 8 \text{ تقريباً}$$

وإذا كان  $N = 1000$  فإن

$$\text{عدد الفئات} = 1 + 3,3 \log 1000 = 1 + 3,3 \times 3 = 11 \text{ تقريباً}$$

يتضح أنه باستخدام هذه القاعدة أن عدد الفئات يزداد بازدياد عدد القيم وبتحديد عدد الفئات والحد الأدنى والأعلى للقيم يمكن تحديد الحد الأدنى والأعلى لكل فئة من الفئات بعد تحديد طول الفئة باستخدام العلاقة :

$$\frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \text{طول الفئة}$$

## أنواع التوزيعات التكرارية

أولاً : التوزيعات التكرارية البسيطة :

وهي التوزيعات التي تختص بظاهرة واحدة ويمكن تقسيمها إلى :

أ - توزيع تكراري بسيط للأعداد :

ونستخدم هذا النوع من الجداول في حالة البيانات الوصفية أو السلاسل الزمنية ( السلاسل التاريخية ) مثال ذلك إذا كان لدينا بيانات بتقديرات ثلاثين طالباً في مادة الاحصاء على النحو التالي :

جيد	مقبول	ممتاز	مقبول	جيد جداً	ضعيف
جيد جداً	مقبول	ضعيف جداً	جيد جداً	ضعيف	جيد جداً
جيد	جيد	مقبول	مقبول	جيد	مقبول
ضعيف	مقبول	جيد	جيد	مقبول	جيد
ممتاز	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جداً	مقبول

وللحصول على التوزيع التكراري نبدأ أولاً بتكوين جدول للتفريغ على الصورة التالية :



جدول (٢ - ١)  
جدول تفرغ التقديرات

التقدير	العلامات	التكرار
ضعيف جداً	/	١
ضعيف	////	٤
مقبول	//// //	١٠
جيد	//// ///	٨
جيد جداً	////	٥
ممتاز	//	٢
المجموع		٣٠

يتضح أن جدول التفرغ يتكون من ثلاثة أعمدة العمود الأول للفئات أو التقدير كما في هذا المثال والعمود الثاني للعلامات ويلاحظ أن لكل مفردة علامة واحدة تمثل بخط مائل ولتسهيل عملية العد نضع العلامة الخامسة بطريقة عكسية لتشكّل ما يسمى بالحزمة الاحصائية (////) وحجمها خمسة ، والعمود الثالث يشمل تكرار كل فئة من الفئات .

ويحذف العمود الخاص بالعلامات من الجدول السابق نحصل على ما يسمى بالتوزيع التكراري للتقديرات في الصورة التالية :

جدول ( ٢ - ٢ )  
التوزيع التكراري لدرجات ثلاثين طالباً

التقدير	التكرار
ضعيف جداً	١
ضعيف	٤
مقبول	١٠
جيد	٨
جيد جداً	٥
ممتاز	٢
المجموع	٣٠

ويسمى بالتوزيع التكراري البسيط للاعداد نظراً لأن العمود الأول والخاص بالفئات أعطى في صورة تقديرات ، ويختلف الأمر إذا أعطيت نسب هذه التقديرات فنحصل على جدول تكراري للفئات غير المتساوية كما سيتضح فيما بعد .

ومن أمثلة الجداول أو التوزيعات التكرارية البسيطة للاعداد جداول السلاسل الزمنية التي توضح صادرات أو مبيعات أو واردات سلعة معينة على سبيل المثال جدول ( ٢ - ٣ ) الذي يوضح صادرات الكويت من النفط و جدول ( ٢ - ٤ ) الذي يوضح أعداد سكان مصر .

جدول (٢ - ٤)

عدد سكان مصر

السنة	عدد السكان بالمليون
١٩٦٠	٢٥,٨٣
١٩٦١	٢٦,٥٦
١٩٦٢	٢٧,٢٤
١٩٦٣	٢٧,٩٧
١٩٦٤	٢٨,٧٦
١٩٦٥	٢٩,٥٤
١٩٦٦	٣٠,١٢

جدول (٢ - ٣)

قيمة صادرات الكويت من النفط

السنة	قيمة الصادرات بالمليون دينار
١٩٧٥	٢٤٤٣,٣
١٩٧٦	٢٦١٧,٧
١٩٧٧	٢٥١٥,٤
١٩٧٨	٢٥٩١,٦
١٩٧٩	٤٦٣٤,٦
١٩٨٠	٤٧٧٨,٣
١٩٨١	٣٨٤٤,٤
١٩٨٢	٢٥٤١,٥
١٩٨٣	٢٨٩٩,٥
١٩٨٤	٣٠٧٦,٤

ومن أمثلة التوزيعات التكرارية البسيطة أيضاً الجداول الوصفية التي تعالج ظاهرة واحدة كما في جدول (٢ - ٥) أو عدة ظواهر كما في جدول (٢ - ٦) .

جدول (٢ - ٥)

توزيع عينة من ٥٠ مفردة بحسب الحالة الاجتماعية

الحالة الاجتماعية	عدد الأفراد
أعزب	١٠
متزوج	٢٦
مطلق	٦
أرمل	٨
المجموع	٥٠

جدول (٢ - ٦)

توزيع الأسر حسب الحالة التعليمية  
لرب الأسرة والجنسية

الحالة التعليمية لرب الأسرة	كويتي	غير كويتي
أمّي	١٠٢	٤٣
يقراً ويكتب	٨٤	٥٧
ابتدائية	٣٣	٣٣
متوسطة	٢٩	٤٣
ثانوية أو ما يعادلها	٢٩	٧١
جامعي فما فوق	١٤	١١١
المجموع	٢٩١	٣٥٨

ومن أمثلة التوزيعات التكرارية البسيطة الجداول الوصفية المزدوجة

كما في جدول (٢ - ٧) أو الجداول الوصفية المركبة كما في جدول (٢ - ٨) .

### جدول (٢ - ٧)

المساكن المأهولة حسب محافظات دولة الكويت (تعداد ١٩٨٠)

المحافظة	عدد المساكن		
	جملة	جماعية	خاصة
العاصمة	٢٣٦٣١	٢٦٩٥	٢٠٩٣٦
حولي	١٠٩٦٥٠	٤٧٣٤	١٠٤٩١٦
الأحمدي	٢٩٤٦٥	٢١٦٢	٢٧٣٠٣
الجهراء	١٧٦٥٤	٨٥٤	١٦٨٠٠
المجموع	١٨٠٤٠٠	١٠٤٤٥	١٦٩٩٥٥

### جدول (٢ - ٨)

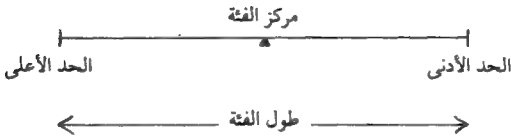
معدلات المواليد والوفيات حسب النوع والجنسية

في عامي (١٩٧٠ ، ١٩٧٨)

السنوات والجنسية		المواليد أحياء		الوفيات	
		ذكور	اناث	ذكور	اناث
١٩٧٠	كويتي	٤٦,٣	٤٥,٩	٦,٣	٥,٢
	غير كويتي	٣٦,٣	٥٧,٥	٤,٣	٤,٥
	المجموع	٤٠,٥	٥١,٦	٥,١	٤,٩
١٩٧٨	كويتي	٤٨,٧	٤٦,٦	٦,٤	٤,٥
	غير كويتي	٢٧,٧	٤٢,٨	٣,٥	٢,٢
	المجموع	٣٥,٨	٤٤,٧	٤,٦	٣,٤

ب - توزيع تكراري متظم ( فئات متساوية ) :

إذا كان لدينا مجموعة كبيرة من البيانات الكمية فيلزم أولاً تلخيصها بوضعها في صورة فئات . ولكل فئة حدان حد أدنى وحد أعلى يمكن تمثيله بالشكل التالي :



$$\text{طول الفئة} = \text{الحد الأعلى} - \text{الحد الأدنى} .$$

$$\text{مركز الفئة} = (\text{الحد الأعلى} + \text{الحد الأدنى}) \div 2$$

وقبل أن نبدأ في تكوين التوزيع التكراري للفئات المتساوية يجب أن نتفق على الصورة التي يجب أن تكتب عليها الفئات فمثلاً إذا كان لدينا مجموعة من البيانات حدها الأدنى صفر وحدها الأعلى ٥٠ وافترضنا توزيع هذه البيانات في صورة توزيع تكراري عدد فئاته ٥ . في هذه الحالة يلزم أن تكون أطوال الفئات متساوية وكل منها يساوي ١٠ .

أي أن الفئات تأخذ الصورة : -

صفر - ١٠
١٠ - ٢٠
٢٠ - ٣٠
٣٠ - ٤٠
٤٠ - ٥٠

يتضح أنه لكل فئة Class حدان حد أدنى وحد أعلى فمثلاً الفئة الأولى حدها الأدنى صفر والأعلى ١٠ والفئة الثانية حدها الأدنى ١٠ والأعلى ٢٠ وهكذا ...

كما يتضح أن الفئات متساوية وطول كل منها ١٠ .

ولكن وضع الفئات في هذه الصورة قد يحدث بعض الأخطاء عند تفريغ البيانات ولتوضيح ذلك نفترض أن هناك مفردة قيمتها ١٠ فإن نستطيع تفريغها هل نضع العلامة أمام الفئة الأولى أم الفئة الثانية والحقيقة فإن الفئة ( صفر - ١٠ ) يجب أن تقرأ صفرأ فأقل من ١٠ والفئة ( ١٠ - ٢٠ ) يجب أن تقرأ ١٠ فأقل من ٢٠ وهكذا .... وفي هذه الحالة يجب أن نضع العلامة الخاصة بالمفردة ١٠ أمام الفئة الثانية :

ولتسهيل ذلك يكفي كتابة الحدود الدنيا فقط كما في الصورة :

صفر -	وتقرأ صفرأ فأقل من ١٠
١٠ -	وتقرأ ١٠ فأقل من ٢٠
٢٠ -	وتقرأ ٢٠ فأقل من ٣٠
٣٠ -	وتقرأ ٣٠ فأقل من ٤٠
٤٠ - ٥٠	وتقرأ ٤٠ فأقل من ٥٠

وبلاحظ أننا وضعنا الحد الأعلى للفئة الأخيرة وذلك لتمييز الجداول المقفولة عن الجداول المفتوحة كما سيتضح فيما بعد .

مثال ( ٢ - ١ ) :

كون التوزيع التكراري المنتظم للدرجات ٨٠ طالباً في مادة المحاسبة بإحدى الكليات والتي كانت على النحو التالي :

٦٨	٨٤	٧٥	٨٢	٦٨	٩٠	٦٢	٨٠	٧٦	٩٣
٧٣	٧٩	٨٤	٧٣	٦٠	٩٣	٧١	٥٩	٨٥	٧٥
٦١	٦٥	٧٥	٨٧	٧٤	٦٢	٩٥	٧٨	٦٣	٧٢
٦٦	٧٨	٨٢	٧٥	٩٤	٧٧	٦٩	٧٤	٦٨	٦٠
٩٦	٧٨	٨٩	٦١	٧٥	٩٥	٦٠	٧٩	٨٣	٧١
٧٩	٦٢	٦٧	٩٧	٧٨	٨٥	٧٦	٧٥	٧١	٧٥
٦٥	٨٠	٧٣	٥٧	٨٠	٧٨	٦٦	٧٦	٥٣	٧٤
٨٦	٦٧	٧٣	٨١	٧٢	٦٣	٧٦	٧٥	٨٥	٧٧

الحل :

يلاحظ أن الحد الأدنى للدرجات هو ٥٣ والحد الأعلى هو ٩٧ ،  
 بافتراض أن عدد الفئات المطلوبة هو ١٠ فإن طول الفئة يجب أن يكون  
 ٥ ، ويلاحظ أنه ليس من الضروري أن نبدأ بالحد الأدنى وهو ٥٣ كحد  
 أدنى للفئة الأولى ويمكننا أن نبدأ بأقرب عدد دائري له وهو ٥٠ أي أن  
 الفئات تأخذ الصورة ٥٠ ، ٥٥ ، ٦٠ ، ... ، ٩٥ ، ١٠٠



جدول (٢-٩)

تفريغ درجات الطلبة

الفتات	العلامات	التكرار
٥٠ -	/	١
٥٥ -	//	٢
٦٠ -	////	١٠
٦٥ -	////	١٠
٧٠ -	// ////	١٢
٧٥ -	//// //// // ////	٢٢
٨٠ -	//// ////	٩
٨٥ -	/ ////	٦
٩٠ -	////	٤
٩٥ - ١٠٠	////	٤
المجموع		٨٠

ويمكن الحصول على التوزيع التكراري المنتظم لدرجات الطلبة  
( أطوال الفتات متساوية وطول كل منها ٥ ) وذلك بحذف العمود الأوسط  
كما في جدول (٢-١٠) .

جدول ( ٢ - ١٠ )

التوزيع التكراري للدرجات ٨٠ طالباً

الفئات	التكرار
٥٠ -	١
٥٥ -	٢
٦٠ -	١٠
٦٥ -	١٠
٧٠ -	١٢
٧٥ -	٢٢
٨٠ -	٩
٨٥ -	٦
٩٠ -	٤
٩٥ - ١٠٠	٤
المجموع	٨٠

جـ - التوزيع التكراري غير المنتظم ( فئات غير متساوية ) :

إذا كانت هناك فئة واحدة على الأقل تختلف في طولها عن بقية الفئات فإن الجدول يطلق عليه التوزيع التكراري غير المنتظم .

وفي بعض الأحيان يتعين أن تكون الفئات غير متساوية حتى تعطي البيانات بعد تفرغها مدلولاً معيناً كما هو الحال في المثال السابق في جدول ( ٢ - ٢ ) الذي يوضح توزيع الدرجات لمجموعة من الطلبة حسب التقديرات المختلفة والذي يمكن إعادة كتابته في الجدول التالي بعد إعادة كتابة التقديرات في صورة النسب المئوية لها .

جدول ( ٢ - ١١ )

التوزيع التكراري لدرجات ٣٠ طالباً

فئات	تكرار
صفر -	١
٣٥ -	٤
٥٠ -	١٠
٦٥ -	٨
٨٠ -	٥
٩٠ - ١٠٠	٢
المجموع	٣٠

يلاحظ اختلاف أطوال الفئات وعليه يطلق على هذا الجدول بالتوزيع التكراري غير المنتظم .

د - التوزيع التكراري المتجمع Cumulative Frequency Distribution :

تعطى التوزيعات التكرارية المتجمعة معلومات أكثر تفصيلاً من التوزيعات التكرارية كما سوف يتضح أهميتها فيما بعد في حساب بعض المقاييس الاحصائية وهناك نوعين :

(١) التوزيع التكراري المتجمع الصاعد :

والغرض منه معرفة عدد المفردات التي تقل عن قيمة معينة. فمثلاً من جدول ( ٢ - ١٠ ) إذا أردنا معرفة عدد الطلبة الذين تقل درجاتهم عن ٦٥ فيتضح أنه يشمل مجموع تكرارات الفئات الثلاثة الأول أي  $١ + ٢ + ١٠$

يساوي ١٣ طالباً، ولتسهيل معرفة مثل هذه النسب يلزم تكوين التوزيع التكراري المتجمع الصاعد والذي يشتمل على عمودين :

العمود الأول : ويسمى الحدود العليا للفئات .  
العمود الثاني : ويسمى التكرار المتجمع الصاعد .

مثال ( ٢ - ٢ ) :

كون الجدول المتجمع الصاعد للتوزيع التكراري المنتظم السابق بجدول ( ٢ - ١٠ ) .

الحل :

جدول ( ٢ - ١٢ )

التوزيع المتجمع الصاعد لدرجات ٨٠ طالباً

حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد
أقل من ٥٠	صفر
أقل من ٥٥	١
أقل من ٦٠	٣
أقل من ٦٥	١٣
أقل من ٧٠	٢٣
أقل من ٧٥	٣٥
أقل من ٨٠	٥٧
أقل من ٨٥	٦٦
أقل من ٩٠	٧٢
أقل من ٩٥	٧٦
أقل من ١٠٠	٨٠

وبلاحظ دائماً أن التكرار المتجمع الصاعد يبدأ بالصفر وينتهي بالمجموع الكلي للتكرارات أي أن التكرار المتجمع الصاعد لأقل من الحد الأدنى للفتة الأولى مساوياً للصفر وأيضاً التكرار المتجمع الصاعد لأقل من الحد الأعلى للفتة الأخيرة يساوي مجموع التكرارات .

مثال ( ٢ - ٣ ) :

كون الجدول المتجمع الصاعد للتوزيع التكراري غير المنتظم السابق بجدول ( ٢ - ١١ ) .

الحل :

جدول ( ٢ - ١٣ )

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد لدرجات ٣٠ طالباً

حدود عليا للفتات	تكرار متجمع صاعد
أقل من صفر	صفر
أقل من ٣٥	١
أقل من ٥٠	٥
أقل من ٦٥	١٥
أقل من ٨٠	٢٣
أقل من ٩٠	٢٨
أقل من ١٠٠	٣٠

(٢) التوزيع التكراري المتجمع الهابط :

الغرض منه معرفة عدد المفردات التي تزيد عن قيمة معينة . فمثلاً

من جدول ( ٢ - ١٠ ) إذا أردنا معرفة نسبة الطلبة المتفوقين الحاصلين على درجات أكثر من ٨٠ فنجد أن عدد المتفوقين يمكن الحصول عليه بجمع التكرارات المناظرة للفئات الأربع الأخيرة أي أن

$$\text{عدد الطلبة المتفوقين} = ٩ + ٦ + ٤ + ٤ = ٢٣ \text{ طالباً .}$$

ونسبتهم هي :

$$\% ٢٨,٧٥ = ١٠٠ \times \frac{٢٣}{٨٠}$$

ويتكون الجدول التكراري المتجمع الهابط من عمودين :

العمود الأول : ويشمل الحدود الدنيا للفئات .

العمود الثاني : ويشمل التكرار المتجمع الهابط .

مثال ( ٢ - ٤ ) :

كون التوزيع التكراري المتجمع الهابط للتوزيع التكراري المتظم بجدول ( ٢ - ١٠ ) .

الحل :

جدول ( ٢ - ١٤ )  
التوزيع المتجمع الهابط لدرجات ٨٠ طالباً

حدود دنيا للفتات	تكرار متجمع هابط
٥٠ فأكثر	٨٠
٥٥ فأكثر	٧٩
٦٠ فأكثر	٧٧
٦٥ فأكثر	٦٧
٧٠ فأكثر	٥٧
٧٥ فأكثر	٤٥
٨٠ فأكثر	٢٣
٨٥ فأكثر	١٤
٩٠ فأكثر	٨
٩٥ فأكثر	٤
١٠٠ فأكثر	صفر

ويلاحظ أن التكرار المتجمع الهابط يبدأ بمجموع التكرارات وينتهي بالصفر على عكس التكرار المتجمع الصاعد .

مثال ( ٢ - ٥ ) :

أوجد التوزيع التكراري المتجمع الهابط للتوزيع التكراري غير المتظم بجدول ( ٢ - ١١ ) .

الحل :

جدول ( ٢ - ١٥ )

التوزيع المتجمع الهابط للدرجات ٣٠ طالباً

حدود دنيا للفئات	تكرار متجمع هابط
صفر فأكثر	٣٠
٣٥ فأكثر	٢٩
٥٠ فأكثر	٢٥
٦٥ فأكثر	١٥
٨٠ فأكثر	٧
٩٠ فأكثر	٢
١٠٠ فأكثر	صفر

من العرض السابق نلاحظ أن تكوين الجداول التكرارية الصاعدة أو الهابطة لا تتأثر بانتظام أو عدم انتظام التوزيع التكراري كما لا تتأثر أيضاً سواءاً كان التوزيع التكراري مفتوحاً أم مغلقاً كما سيتضح فيما بعد .

هـ - التوزيعات التكرارية المفتوحة :

التوزيع التكراري إما أن يكون مفتوحاً من أعلى أو من أسفل أو من الطرفين معاً .



والتوزيع التكراري المفتوح من أعلى هو التوزيع الذي فيه الحد الأدنى للفئة الأولى غير معلوم أما إذا كان الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معلوم فيسمى الجدول في هذه الحالة بالتوزيع التكراري المفتوح من أسفل وفي حالة عدم معرفة الحد الأدنى للفئة الأولى والحد الأعلى للفئة الأخيرة في نفس الوقت يسمى الجدول بالتوزيع التكراري المفتوح من الطرفين .

وباستخدام بيانات جدول ( ٢ - ١١ ) يمكن كتابة التوزيعات التكرارية المفتوحة في الشكل التالي :

جدول ( ٢ - ١٦ )  
توزيع تكراري مفتوح من أعلى

تكرار	فئات
١	أقل من ٣٥
٤	٣٥ -
١٠	٥٠ -
٨	٦٥ -
٥	٨٠ -
٢	٩٠ - ١٠٠
٣٠	المجموع

جدول ( ٢ - ١٧ )  
توزيع تكراري مفتوح من أسفل

تكرار	فئات
١	صفر -
٤	٣٥ -
١٠	٥٠ -
٨	٦٥ -
٥	٨٠ -
٢	٩٠ فأكثر
٣٠	المجموع

جدول ( ٢ - ١٨ )  
توزيع تكراري مفتوح من الطرفين

تكرار	فئات
١	أقل من ٣٥
٤	٣٥ -
١٠	٥٠ -
٨	٦٥ -
٥	٨٠ -
٢	٩٠ فأكثر
٣٠	المجموع

## ثانياً : التوزيعات التكرارية المزدوجة

### Double Frequency Distributions

يحدث في كثير من الأحيان أن يكون أمامنا مجموعتان من القيم تقيس ظاهرتين بينهما علاقة . على سبيل المثال إذا كان لدينا بيانات عن دخل مجموعة من العمال وانفاقهم على السلع والخدمات أو درجات مجموعة من الطلبة في مادتي المحاسبة والاحصاء أو بيانات عن المبيعات والأرباح .

ونلجأ إلى عرض مثل هذه البيانات في جدول مزدوج واحد للدراسة العلاقة بين الظاهرتين ومعرفة التغير فيهما . وقد تكون تلك البيانات خاصة بظاهرتين كميتين أو ظاهرتين وصفيتين أو ظاهرة كمية والأخرى وصفية وسوف نركز على الظواهر الكمية في دراستنا في هذا الفصل .

ولعلاج هذه الحالة نقوم بوضع البيانات في جدول توزيع تكراري مزدوج على شكل مستقيم مقسم رأسياً وأفقياً ويبيّن التقسيم الرأسي فئات الظاهرة الأولى بينما يبيّن التقسيم الأفقي فئات الظاهرة الثانية .

مثال ( ٢ - ٦ ) :

البيانات الآتية توضح درجات ٣٠ طالباً في مادتي المحاسبة (س) والاحصاء (ص) .

ص	س	ص	س	ص	س
٤٥	٣٥	٥٠	٤٠	٧٥	٦٠
٥٠	٥٥	٥٠	٦٠	٨٠	٦٥
٨٠	٦٥	٥٥	٦٥	٦٥	٥٥
٤٥	٥٥	٨٥	٧٠	٧٥	٧٠
٩٥	٨٥	٩٥	٧٥	٩٥	٨٠
٩٥	٩٢	٧٥	٤٠	٥٠	٤٠
٦٨	٤٢	٥٠	٣٥	٤٥	٣٥
٦٥	٤٥	٨٤	٥٦	٧٠	٥٥
٥٥	٥٥	٨٠	٥٧	٨٠	٦٠
٦٥	٦٠	٥٨	٤٢	٨٥	٧٥

الحل :

لوضع هذه البيانات في جدول تكراري مزدوج يلزم أولاً تحديد فئات وأطوال فئات كلتا الظاهرتين وبالبحث عن الحد الأدنى والحد الأعلى لقيم الظاهرة (س) فنجد أنهما (٣٥ ، ٩٢) على الترتيب ويكون المدى بين القيمتين (٥٧) فيمكن تقسيمه على (٦) فئات طول كل منها (١٠) وتكتب على النحو التالي : -

٣٥ - ، ٤٥ - ، ... ، ٨٥ - ٩٥ .

وبالبحث عن الحد الأدنى والحد الأعلى لقيم الظاهرة (ص) فنجد

أنهما (٤٥ ، ٩٥) على الترتيب ويكون المدى (٥٠) ونستطيع تقسيمه إلى (٥) فئات طول كل منها (١٠) على النحو التالي :

٩٥ - ٨٥ ، ..... ، - ٥٥ ، - ٤٥ .

وبذلك نحصل على مستطيل به مربعات صغيرة نرصد بداخل كل مربع زوج القيم ( س ، ص ) التي تقع به كما في الجدول التالي :

جدول ( ٢ - ١٩ )  
تفريغ قيم الظاهرتين ( س ، ص )

فئات س	فئات ص	- ٣٥	- ٤٥	- ٥٥	- ٦٥	- ٧٥	٩٥ - ٨٥
- ٤٥	///			///			
- ٥٥	/	/	/	/			
- ٦٥	/	/	/	///			
- ٧٥	/			////	///		
٩٥ - ٨٥					/	///	//

ثم بعد ذلك نكتب بداخل كل مربع عدد التكرارات التي رصدناها ونجمع الأعمدة والصفوف فنحصل على الجدول المزدوج في الشكل التالي :

جدول (٢ - ٢٠)  
التوزيع التكراري المزدوج لقيم (س ، ص)

ص \ س	٣٥ -	٤٥ -	٥٥ -	٦٥ -	٧٥ -	٨٥ - ٩٥	المجموع
٤٥ -	٥		٣				٨
٥٥ -	١		١	١			٣
٦٥ -	١	١	٣				٥
٧٥ -	١		٤	٣			٨
٩٥ - ٨٥				١	٣	٢	٦
المجموع	٨	١	١١	٥	٣	٢	٣٠

يمكن استخدام الجدول السابق للحصول على التوزيع الهامشي لدرجات الطلبة في مادة المحاسبة وكذلك التوزيع الهامشي لدرجات الطلبة في مادة الاحصاء في صورة توزيعات تكرارية بسيطة على النحو التالي :

جدول (٢ - ٢٢)  
التوزيع الهامشي لدرجات  
الطلبة في الاحصاء

فئات ص	التكرار
٤٥ -	٨
٥٥ -	٣
٦٥ -	٥
٧٥ -	٨
٨٥ - ٩٥	٦
المجموع	٣٠

جدول (٢ - ٢١)  
التوزيع الهامشي لدرجات  
الطلبة في المحاسبة

فئات س	التكرار
٣٥ -	٨
٤٥ -	١
٥٥ -	١١
٦٥ -	٥
٧٥ -	٣
٨٥ - ٩٥	٢
المجموع	٣٠

### ثالثاً : التوزيعات التكرارية النسبية

#### Relative Frequency Distributions

نلجأ في كثير من الأحيان إلى استخدام التوزيعات التكرارية النسبية من أجل إجراء المقارنات بين التوزيعات التكرارية والتي تختلف في مجموع التكرارات كما تستخدم كثيراً في الاحصاءات الاستدلالية والتحليلية كما سيأتي فيما بعد . ونحصل على التوزيع التكراري النسبي بتحويل التكرارات إلى نسب باستخدام العلاقة الآتية :

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{التكرار الأصلي}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

والتكرار النسبي أقرب ما يكون إلى التعريف الكلاسيكي للاحتمال وسوف نستعرض ذلك بأسهاب في الفصول القادمة .

ويمكننا تحويل جميع التوزيعات السابقة إلى جداول تعتمد على التكرارات النسبية بدلاً من التكرارات الأصلية ونأخذ على سبيل المثال :

(١) جدول التوزيع التكراري النسبي الذي يناظر التوزيع التكراري لدرجات ٣٠ طالباً في مادة المحاسبة بجدول (٢ - ٢١) يمكن الحصول عليه بقسمة كل التكرارات في الجدول على ٣٠ فنحصل على الجدول التالي :

جدول ( ٢ - ٢٣ )

التوزيع التكراري النسبي لدرجات ٣٠ طالباً في المحاسبة

فئات	تكرار نسبي
٣٥ -	٢٧ ,
٤٥ -	٠٣ ,
٥٥ -	٣٧ ,
٦٥ -	١٧ ,
٧٥ -	١٠ ,
٨٥ - ٩٥	٠٦ ,
المجموع	١,٠٠

(٢) جدول التوزيع التكراري النسبي الذي يناظر التوزيع التكراري لدرجات ٣٠ طالباً في مادة الاحصاء بجدول ( ٢ - ٢٢ ) يمكن الحصول عليه بقسمة كل التكرارات في الجدول على ٣٠ أيضاً فنحصل على:

جدول ( ٢ - ٢٤ )

التوزيع التكراري النسبي لدرجات ٣٠ طالباً في الاحصاء

فئات	تكرار نسبي
٤٥ -	٢٧ ,
٥٥ -	١٠ ,
٦٥ -	١٦ ,
٧٥ -	٢٧ ,
٨٥ - ٩٥	٢٠ ,
المجموع	١,٠٠



ويمكننا استخدام التكرار النسبي في إيجاد التوزيعات التكرارية النسبية المتجمعة الصاعدة والهابطة كما سبق باستخدام التكرارات الأصلية وعلى سبيل المثال يمكن تكوين جدول التكرار النسبي الصاعد من التوزيع التكراري النسبي بجدول ( ٢ - ٢٤ ) على النحو التالي :

جدول ( ٢ - ٢٥ )  
التوزيع التكراري النسبي الصاعد

حدود عليا للفتات	تكرار نسبي متجمع صاعد
أقل من ٤٥	صفر
أقل من ٥٥	, ٢٧
أقل من ٦٥	, ٣٧
أقل من ٧٥	, ٥٣
أقل من ٨٥	, ٨٠
أقل من ٩٥	١, ٠٠

## تمارين الفصل الثاني

(١) فيما يلي بيان بقيمة مبيعات إحدى المحلات التجارية خلال شهر سبتمبر ١٩٨٥ والقيم بآلاف الجنيهات .

٨٧	٧٦	٧٤	٦٦	٨٩	٨٥
٨٦	٨٤	١٠١	٩٧	٨١	٦٠
٩٩	٨٦	٨٩	٨٥	٦٦	٧١
٩٣	٥٥	٨٥	٨٩	١١٠	١٠٣
٨٢	٩٢	١٠١	١٠٦	٧٥	٨٧

والمطلوب :

- إعداد جدول توزيع تكراري لهذه القيم .
- عدد الأيام التي كانت تقل فيها قيم المبيعات عن ٩٠ ألف جنيه .
- عدد الأيام التي كانت تزيد فيها قيم المبيعات عن ٨٠ ألف جنيه .
- أوجد التوزيع التكراري النسبي .

(٢) سجلت أطوال ٤٠ من أوراق نبات معين إلى أقرب ملليمتر :

١٣٨	١٦٤	١٥٠	١٣٢	١٤٤	١٢٥	١٤٩	١٥٧
١٤٦	١٥٨	١٤٠	١٤٧	١٣٦	١٤٨	١٥٢	١٤٤
١٦٨	١٢٦	١٣٨	١٧٦	١٦٣	١١٩	١٥٤	١٦٥
١٤٦	١٧٣	١٤٢	١٤٧	١٣٥	١٥٣	١٤٠	١٣٥
١٦١	١٤٥	١٣٥	١٤٢	١٥٠	١٥٦	١٤٥	١٢٨

والمطلوب :

- أ - تكوين التوزيع التكراري للأطوال .  
 ب - إيجاد جدول التكرار المتجمع الصاعد والهابط .  
 جـ - أوجد التوزيع النسبي الصاعد والهابط .  
 (٣) إذا كان لدينا عينة من ٣٠ مفردة لدراسة العلاقة بين عمر الزوج (س) وعمر الزوجة (ص) :

ص	س	ص	س	ص	س
٥٠	١٧	٣٨	٢٣	٣٢	٢٨
٤٨	١٧	٤٦	١٧	٤٣	٢٣
٤٢	٢٥	٤١	٢٢	٤٤	٣٠
٤٣	١٦	٥٠	٢٣	٢٥	١٨
٣١	٢٩	٣٦	١٨	٣٤	١٩
٤٢	٢٢	٢٥	٢٩	٣٩	٢٤
٢٤	١٧	٣٧	٢٥	٥٠	٢٤
٤٩	٢٣	٣٩	٢٣	٢٤	١٩
٤٨	٢٠	٣٢	٢٧	٢٨	٢٣
٣١	٢٧	٤٣	٢٣	٤٩	٢١

المطلوب إيجاد التوزيع التكراري المزدوج لعمر الزوج والزوجة ثم اشتق التوزيع الهامشي لعمر الزوج والتوزيع الهامشي لعمر الزوجة .

(٤) فيما يلي درجات أربعين طالباً في مادة المحاسبة ( النهاية العظمى ١٠٠ ) .

٩٢	٨٨	٨٨	٩٣	٩٩	٨١	٧٩	٩٣
٧٩	٩٥	٧٦	٩٢	٨٢	٩٦	٨٧	٧٥
٧٤	٧٣	٩٧	٩٠	٩٤	٧٤	٨٩	٨٨
٦٧	٨٤	٩٧	٩١	٩٩	٨٩	٩٦	١٩
٦٨	١٠٠	٧٠	٩٦	٦٢	٨٦	٧١	٩٥

والمطلوب :

أ - إيجاد التوزيع التكراري المنتظم طول فئاته ١٠ درجات ومبتدأ الفئة الأولى بالدرجة ٦٠ .

ب - إيجاد التوزيع التكراري المتجمع الصاعد والهابط .

جـ - إيجاد نسبة عدد الطلبة الحاصلين على أكثر من ٨٠٪ من الدرجات .

د - إيجاد نسبة عدد الطلبة التي تتراوح درجاتهم بين ٦٠ - ٨٠ درجة .

(٥) سجلت أوزان عينة من ٤٠ عاملاً في أحد المصانع لأقرب رطل على النحو التالي :

١٧٣	١٤٨	١٥٧	١٥٤	١٥٠	١٧٥	١٤٥	١٤٥
١٣٨	١٥٢	١٨٦	١٤٦	١٣٥	١٤٥	١٦٠	١٤٢
١٤٦	١٧٤	١٥٧	١٧٣	١٥٨	١٥٩	١٥٥	١٥٦
١٦٨	١٦٨	١٧٠	١٤٥	١٢٩	١٦٢	١٦٧	١٢٨
١٥٦	١٣٦	١٥٠	١٤٢	١٦٣	١٦٤	١٥٤	١٧١

### والمطلوب :

- أ - تكوين توزيع تكراري منتظم لأوزان العمال طول فئاته ١٠  
أرطال ومبتدأ الفئة الأولى بالرطل ١٢٨ .
- ب - ايجاد الجدول التكراري المتجمع الصاعد والهابط .
- ج - ايجاد نسبة عدد العمال التي تنحصر أوزانهم بين ( ١٣٨ ، ١٥٨ ) .
- د - ايجاد التوزيع التكراري النسبي لأوزان العمال .
- (٦) أوجد القيم المفقودة من الجدول التالي : -

الفئات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار النسبي
٥ -	-	-	-
٦ -	١٩	٢٧	-
٧ -	-	-	٣٥ ,
٨ -	١٥	-	١٥ ,
٩ -	-	٩١	-
١٠ - ١١	-	-	-
المجموع	١٠٠		١

(٧) تمّ تسجيل ٢٠ طالباً بقسم اللغات الأجنبية وكان تخصصهم الأساسي على النحو التالي : -

اسباني	فرنسي	روسي	الماني	الماني
اسباني	اسباني	روسي	الماني	ايطالي
فرنسي	الماني	فرنسي	اسباني	الماني
ايطالي	الماني	الماني	روسي	اسباني

والمطلوب :

أ - تكوين جدول التوزيع التكراري .

ب - تكوين الجدول التكراري النسبي

## الفصل الثالث

### التمثيل البياني

### Graphical Presentation

#### مقدمة

بعد عملية جمع البيانات وتبويبها في صورة توزيعات تكرارية مختلفة تأتي مرحلة معالجتها بيانياً في صورة سهلة يسهل فهمها ومعرفة مدلولها مما يساعد الناس على اختلاف مستوياتهم للتعرف على الاتجاه العام لهذه التوزيعات بغرض تحليل البيانات بطريقة علمية سليمة يمكن على أساسها اتخاذ القرارات المناسبة .

وتختلف طرق التمثيل البياني باختلاف نوع البيانات ففي حالة التوزيعات التكرارية البسيطة غير المبوبة والتي تشمل السلاسل الزمنية للظواهر المختلفة كما أوضحنا في الفصل السابق هناك طرق عديدة لتمثيلها أهمها :

- (١) طريقة الأعمدة أو المستطيلات .
- (٢) طريقة الدوائر .
- (٣) طريقة الخط البياني .

أما التوزيعات التكرارية المبوبة على صورة فئات وتكرار فيستخدم في تمثيلها الطرق الآتية :

- (١) المدرج التكراري .
- (٢) المضلع التكراري .
- (٣) المنحنى التكراري .
- (٤) المنحنيات التكرارية المتجمعة الصاعدة والهابطة .

أولاً : التمثيل البياني للبيانات غير المبوبة

أ - طريقة الأعمدة أو المستطيلات Bar Chart :

(١) في حالة ظاهرة واحدة :

مثال (٣ - ١) :

الجدول التالي يوضح صادرات مصر من القطن خلال عدة سنوات والقيم تقديرية بالمليون جنيه والمطلوب عرض هذه البيانات باستخدام طريقة المستطيلات .

السنة	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥
قيمة الصادرات	٢٠	٢٥	١٥	٢٢	٣٠

ولعرض مثل هذه البيانات باستخدام طريقة المستطيلات نعلم أن مساحة المستطيل = القاعدة  $\times$  الارتفاع . وفي هذه الطريقة يجب أن تتناسب الارتفاعات مع ما تدل عليه من أرقام ولذلك حتى تكون صورة التمثيل صادقة يجب أن يكون عرض الأعمدة أو قواعد المستطيلات متساوية .

ولعرض مثل هذه البيانات نتبع الخطوات التالية :

١ - نرسم محورين متعامدين المحور الأفقي ويسمى بالمحور السيني



ويخصص دائماً للمتغير المستقل سواء كان سنوات أو فئات ،  
والمحور الرأسي ويسمى بالمحور الصادي ويخصص دائماً للتكرارات  
أو لقياس ظاهرة ما مثل التغير في قيمة الصادرات .

١ - استخدام مقياس رسم مناسب لتقسيم المحورين .

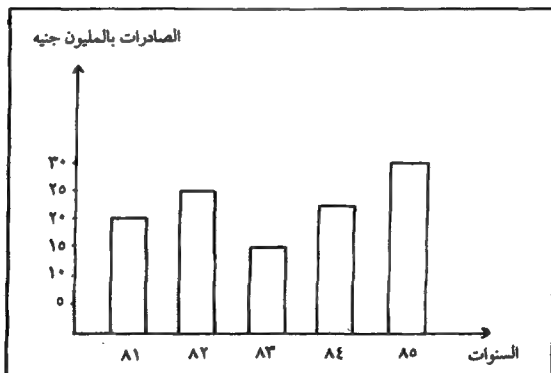
٢ - تقام المستطيلات للتعبير عن الارتفاعات النسبية للظاهرة محل الدراسة  
ويراعى أن تكون قواعد الأعمدة أو المستطيلات متساوية كما يراعى  
أن تترك مسافات متساوية بين كل مستطيلين .

٤ - يحاط الشكل بإطار ويوضع فوق الشكل بيان برقمه وملخص لطبيعة  
البيانات التي يمثلها . ويتضح ذلك في الشكل التالي :

### شكل ( ٣ - ١ )

القيمة التقديرية لصادرات مصر بالمليون جنيه

في الفترة ( ١٩٨١ - ١٩٨٥ )



(٢) في حالة أكثر من ظاهرة :

إذا كان المطلوب استخدام طريقة المستطيلات لعرض ظاهرتين أو أن هناك ظاهرة واحدة مجزأة إلى مكوناتها مثل الدخل القومي ( زراعة - صناعة - سياحة - . . . ) فنستخدم إحدى طريقتين ، المستطيلات المتلاصقة أو المستطيلات المجزأة .

طريقة المستطيلات المتلاصقة :

مثال ( ٣ - ٢ ) :

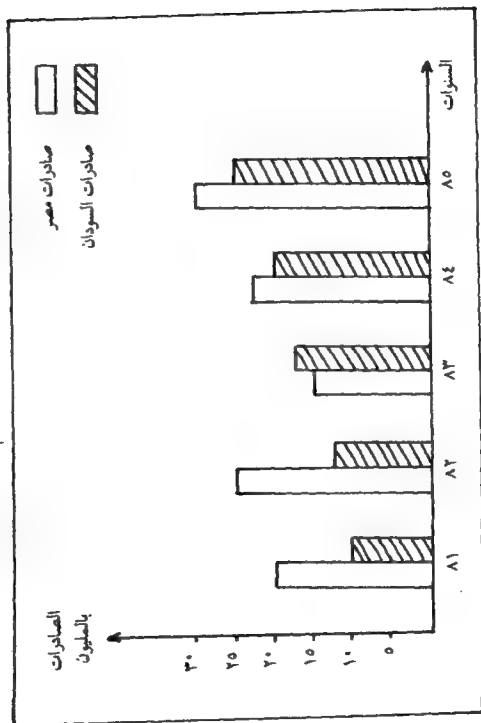
الجدول التالي يوضح القيم التقديرية لصادرات مصر والسودان بالمليون جنيه خلال عدة سنوات والمطلوب عرضها بشكل مناسب .

السنة	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥
صادرات مصر	٢٠	٢٥	١٥	٢٢	٣٠
صادرات السودان	١٠	١٢	١٧	٢٠	٢٥

لعرض هذه البيانات باستخدام المستطيلات المتلاصقة نستخدم نفس الخطوات السابقة ونفس مقياس الرسم بالنسبة للمحور الصادي ( كل ١ سم يمثل ٥ مليون جنيه ) أما بالنسبة للمحور السيني فنجعل كل سنة ممثلة بمستطيلين متلاصقين أحدهما لصادرات مصر والآخر لصادرات السودان ونترك مسافات متساوية أيضاً بين مستطيلات كل سنة كما يتضح في شكل ( ٣ - ٢ ) .

شكل (٣-٢)

القيمة التقديرية لصادرات مصر والسودان باستخدام طريقة المستطيلات المتلاصقة



### طريقة المستطيلات المجزأة :

لعرض بيانات مثال ( ٣ - ٢ ) باستخدام المستطيلات المجزأة نقوم بإيجاد مجموع صادرات مصر والسودان لجميع السنوات كما في الجدول التالي :

#### جدول ( ٣ - ١ )

القيمة التقديرية لصادرات مصر والسودان

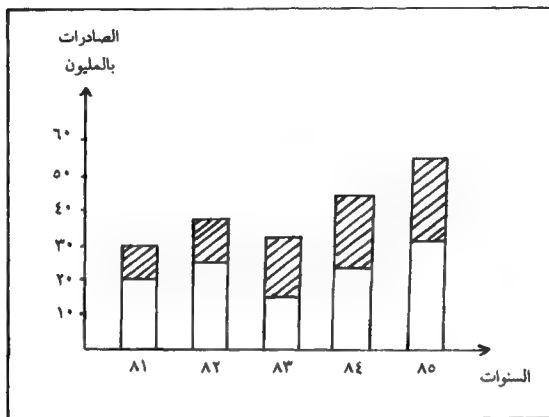
السنة	صادرات مصر	صادرات السودان	إجمالي الصادرات
١٩٨١	٢٠	١٠	٣٠
١٩٨٢	٢٥	١٢	٣٧
١٩٨٣	١٥	١٧	٣٢
١٩٨٤	٢٢	٢٠	٤٢
١٩٨٥	٣٠	٢٥	٥٥

ونأخذ مقياس الرسم على النحو التالي :

— المحور الرأسي : ويمثل الصادرات وكل ١ سم يمثل ١٠ مليون جنيه .

— المحور الأفقي : ويمثل السنوات وكل سنة تمثل بمستطيل واحد قاعدته ١ سم يمثل إجمالي الصادرات ثم يجزأ كل مستطيل إلى قسمين أحدهما لصادرات مصر والآخر لصادرات السودان ونترك مسافة ١ سم بين كل مستطيلين كما يتضح في شكل ( ٣ - ٣ ) .

شكل ( ٣ - ٣ )  
القيمة التقديرية لصادرات مصر والسودان  
بإستخدام طريقة المستطيلات المجهزة



مثال ( ٣ - ٣ ) :

الجدول التالي يوضح السكان غير الكويتين المولودين في الكويت  
حسب النوع ومجموعات الدول .

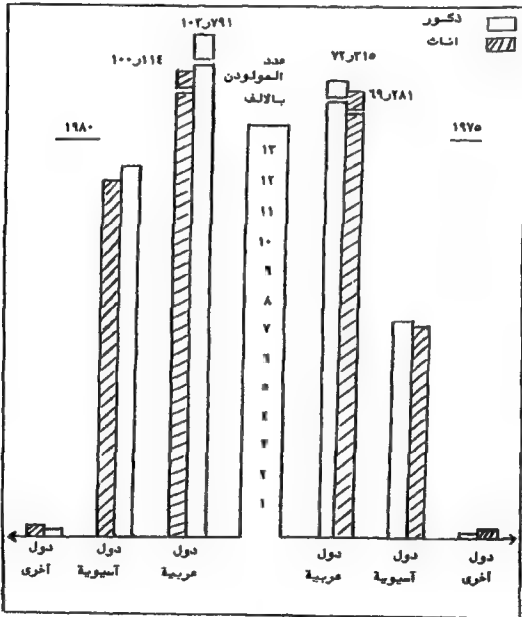
١٩٨٠		١٩٧٥		مجموعات الدول
اناث	ذكور	اناث	ذكور	
١٠٠,١١٤	١٠٣,٧٩١	٦٩,٢٨١	٧٢,٣١٥	الدول العربية
١٢,١٥٩	١٢,٧٠٥	٧,١٩٣	٧,٢٢٤	الدول الآسيوية
٢٧١	٢٣٣	٢٠٨	١٩٤	الدول الأخرى

الحل :

باستخدام طريقة المستطيلات المتلاصقة يمكن تمثيل بيانات المثال السابق في اتجاهين . الاتجاه الأيمن يمثل بيانات سنة ١٩٧٥ والاتجاه الأيسر يمثل بيانات سنة ١٩٨٠ ، كما يوضحه شكل (٣ - ٤) .

شكل (٣ - ٤)

السكان غير الكويتيين المولودين في الكويت  
حسب النوع ومجموعات الدول



ملاحظة : يتضح من شكل ( ٣ - ٤ ) أنه عندما يكون هناك قيم كبيرة كما هو الحال في حالة الدول العربية في ستي ١٩٧٥ ، ١٩٨٠ بالمقارنة بالدول الأخرى استخدمنا فكرة المستطيلات المقطوعة من أعلى وذلك حتى يمكن الحصول على شكل مناسب .

#### ب - طريقة الدوائر :

بالرغم من بساطة وسهولة طريقة المستطيلات إلا أن طريقة الدوائر تستخدم لنفس الغرض لخدمة بعض الدارسين ففي حالة ظاهرة واحدة كما في مثال ( ٣ - ١ ) يمكن تمثيلها بدائرة واحدة مقسمة إلى قطاعات كل قطاع يمثل صادرات إحدى السنوات ، وحيث أن مساحة القطاع تتناسب مع زاوية رأسه فنقسم الدائرة إلى قطاعات تكون الزاوية المركزية لكل منها متناسبة مع حجم الفئة التي يمثلها هذا القطاع وذلك باتباع الخطوات التالية :

- ١ - نوجد النسبة المئوية لكل قطاع من مجموع القطاعات .
- ٢ - نضرب النسبة المئوية لكل قطاع في ٣,٦ ( وهو المقدار الذي يخص كل ١٪ ) فنحصل على الزاوية المركزية لكل قطاع .
- ٣ - نرسم دائرة مناسبة ونقسمها إلى القطاعات المختلفة .

أما في حالة ظاهرتين أو أكثر فنمثل كل ظاهرة بدائرة ونستخدم نفس الخطوات السابقة مع مراعاة أن تعكس كل دائرة حجم الظاهرة الكلي التي تمثلها ومن أجل ذلك يجب أن تتناسب مساحات الدوائر مع الحجم الكلي لكل ظاهرة .

حيث أن :

$$\frac{\text{الحجم الكلي للظاهرة الأولى}}{\text{الحجم الكلي للظاهرة الثانية}} = \frac{\text{ط نق}^1}{\text{ط نق}^2} = \frac{\text{نق}^1}{\text{نق}^2}$$

حيث :

١ نق هو نصف قطر الدائرة الأولى  
٢ نق هو نصف قطر الدائرة الثانية  
ط مقدار ثابت

وبمعرفة النسبة بين نصفي القطرين وبافتراض نصف قطر لإحدى الدائرتين يمكن معرفة نصف القطر الآخر كما يتضح في المثال التالي : -  
مثال ( ٣ - ٤ ) :

الجدول التالي يوضح معدل الوفيات في كل من مصر وانجلترا في الفترة من ١٩٨٠ إلى ١٩٨٣ والمطلوب تمثيلها بيانياً باستخدام الدوائر .

السنة	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	المجموع
معدل الوفيات في مصر	٢٩	٢٧	٢٣	٢١	١٠٠
معدل الوفيات في انجلترا	١٤	١٣	١٢	١١	٥٠

سوف يكون لدينا دائرتان إحداهما لوفيات انجلترا والاخرى لوفيات مصر ولتحديد نصف قطر كل منهما .

$$\frac{٥٠}{١٠٠} = \frac{\text{مجموع وفيات انجلترا}}{\text{مجموع وفيات مصر}} = \frac{٢ \text{ نق}}{١ \text{ نق}}$$

$$\therefore ١ \text{ نق} : ٢ \text{ نق} = ١ : ١,٤$$

فإذا افترضنا أن نصف قطر الدائرة الأولى التي تمثل وفيات انجلترا  
١ نق = ٤ سم مثلاً فإن ٢ نق = ٥,٦ سم .



بعد ذلك نأخذ كل ظاهرة على حدة لتحديد الزاوية المركزية لكل قطاع فنحصل على الجدولين التاليين :

جدول ( ٣ - ٢ )  
حساب الزوايا المركزية لقطاعات انجلترا

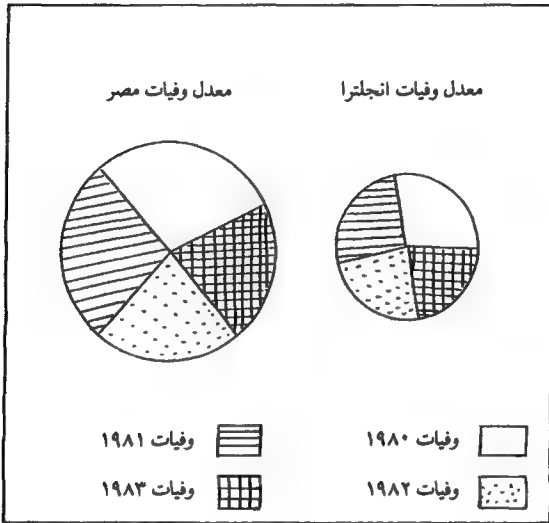
السنة	معدل وفيات انجلترا	النسبة %	زاوية كل قطاع
١٩٨٠	١٤	٢٨	°١٠٠,٨
١٩٨١	١٣	٢٦	°٩٣,٦
١٩٨٢	١٢	٢٤	°٨٦,٤
١٩٨٣	١١	٢٢	°٧٩,٢
المجموع	٥٠	١٠٠	°٣٦٠

جدول ( ٣ - ٢ )  
حساب الزوايا المركزية لقطاعات مصر

السنة	معدل وفيات مصر	النسبة %	زاوية كل قطاع
١٩٨٠	٢٩	٢٩	°١٠٤,٤
١٩٨١	٢٧	٢٧	°٩٧,٢
١٩٨٢	٢٣	٢٣	°٨٢,٨
١٩٨٣	٢١	٢١	°٧٥,٦
المجموع	١٠٠	١٠٠	°٣٦٠

### شكل (٣-٥)

معدل وفيات مصر وانجلترا في الفترة ١٩٨٠ - ١٩٨٣



ج - الخط البياني :

تستخدم خريطة الخط البياني لتوضيح الظواهر التي تقاس على صورة سلسلة زمنية مثل صادرات أو واردات بلد ما من سلعة معينة أو أعداد السكان خلال التعدادات السكانية في سنوات متعاقبة أو حجم المبيعات أو أرباح إحدى الشركات في عدة شهور أو سنوات متتالية . وتتلخص خطواتها

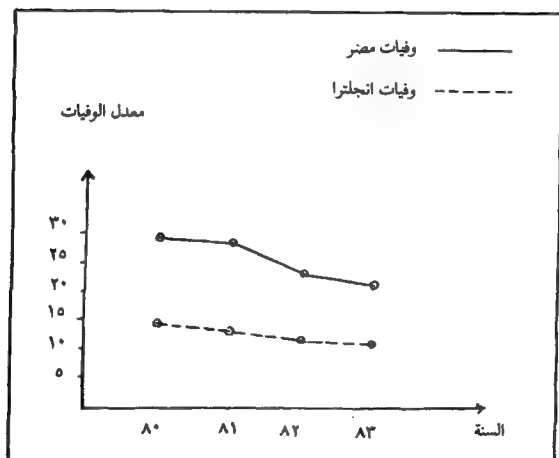
في رسم المحورين المتعامدين وتحديد مقياس الرسم المناسب ثم تحديد النقط التي تمثل تطور الظاهرة وبتوصيل هذه النقط بخطوط مستقيمة نحصل على الخط البياني المطلوب . ويمكن استخدام الخط البياني لتمثيل ظاهرة واحدة أو ظاهرتين .

مثال ( ٣ - ٥ ) :

استخدم طريقة الخط البياني في عرض البيانات الخاصة بمعدلات الوفيات بمصر وانجلترا في مثال ( ٣ - ٤ ) . باستخدام الخطوات السابقة نحصل على الشكل التالي :

### شكل ( ٣ - ٦ )

معدلات الوفيات التقديرية بمصر وانجلترا



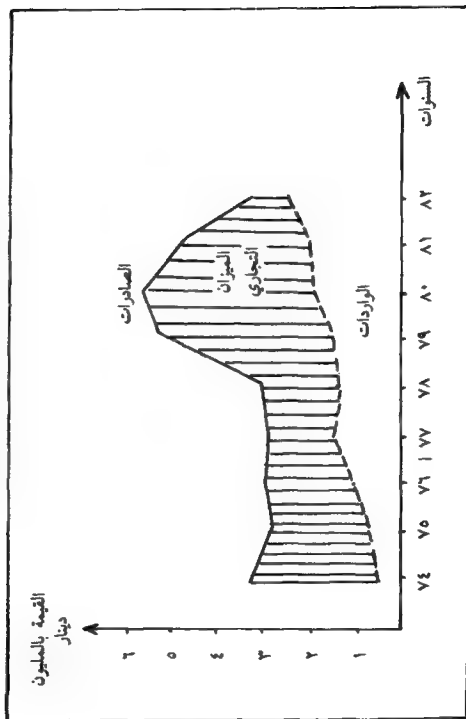
مثال (٣-٦) :

الجدول التالي يوضح قيمة الصادرات والواردات والميزان التجاري بالمليون دينار في دولة الكويت عن المدة ٧٤ - ١٩٨٢ :

السنة	جملة الصادرات	جملة الواردات	الميزان التجاري
١٩٧٤	٣,٢١٥	٤٥٥	٢,٧٦٠
٧٥	٢,٦٦٣	٦٩٣	١,٩٧٠
٧٦	٢,٨٧٤	٩٧٢	١,٩٠٢
٧٧	٢,٧٩٣	١,٣٨٧	١,٤٠٧
٧٨	٢,٨٦٤	١,٢٦٤	١,٦٠٠
٧٩	٥,٠٨٩	١,٤٣٧	٣,٦٥٢
٨٠	٥,٥٢٧	١,٧٦٥	٣,٧٦٢
٨١	٤,٥٣١	١,٩٤٥	٢,٥٨٦
٨٢	٣,١٢٨	٢,٣٨٥	٧٤٣

الحل : باستخدام فكرة الخط البياني يمكن تمثيل الصادرات بخط بياني وكذلك الواردات والفرق بينهما يعطي الميزان التجاري كما يوضحه الشكل التالي .

شكل (٧-٣) قيمة الصادرات والواردات والميزان التجاري



## ثانياً : التمثيل البياني للبيانات المبوبة

### أ - المدرج التكراري Histogram :

المدرج التكراري عبارة عن مستطيلات متلاصقة تتناسب قواعدها مع أطوال الفئات وتتناسب ارتفاعاتها مع تكرار كل فئة .

(١) المدرج التكراري للتوزيعات المنتظمة :

إذا كان التوزيع التكراري منتظماً أي فئاته متساوية . نتبع الخطوات التالية لرسم المدرج التكراري :

١ - نرسم محورين متعامدين ، المحور السيني يمثل الفئات والمحور الصادي يمثل التكرار .

٢ - تحديد مقياس الرسم المناسب بالنظر إلى أكبر تكرار .

٣ - بعد تقسيم المحور الأفقي إلى الفئات المتساوية نقيم على كل فئة مستطيلاً ارتفاعه يناظر التكرار المقابل له بحيث تكون جميع المستطيلات متلاصقة .

مثال (٣-٧) :

الجدول التالي يوضح توزيع عدد من العمال وفقاً لأجورهم الشهرية .

عدد العمال	فئات الأجر
٣	٢٠ -
٧	٣٠ -
١٢	٤٠ -
٦	٥٠ -
٢	٦٠ - ٧٠

والمطلوب رسم المدرج التكراري .

باتباع الخطوات السابقة وباختيار مقياس الرسم على النحو التالي :

المحور الرأسي : يمثل عدد العمال وكل ١ سم يمثل عدد ٢ عامل .

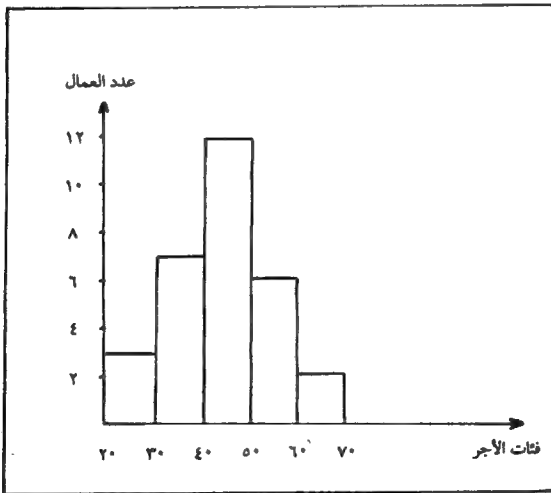
المحور الأفقي : يمثل الفئات ونبدأ نقطة الأصل ببداية الفئات وهي

٢٠ ، ثم نجعل كل ١ سم يمثل ١٠ ، ثم نرسم

المستطيلات المتلاصقة كما يتضح في الشكل التالي :

شكل ( ٣ - ٨ )

المدرج التكراري لأجور عدد من العمال



ويلاحظ على المدرج التكراري ما يلي :

١ - يلاحظ أننا ألصقنا المستطيل بالمحور الرأسي ولقد حرصنا على ذلك لتجنب الوقوع في الخطأ عند تحديد مقياس الرسم للمحور الأفقي ، ويمكننا أن نترك مسافة بين المستطيل الأول والمحور الرأسي إذا اعتبرنا نقطة الأصل كما هي ونأخذ كل ١ سم يمثل ١٠ جنيهات .

٢ - يلاحظ أن مساحة المستطيل هي التي تمثل التكرار وحيث أن قواعد المستطيلات متساوية فيمكن أن يؤخذ الارتفاع وحده كمؤشر للمقارنة لأن مساحة المستطيل = الطول × العرض .

وحيث أن عرض المستطيلات ثابت فإنه يمكن التعبير عن النسب بين المساحات بالأطوال فقط .

٣ - في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة من أسفل أو من أعلى أو من الطرفين نتبع نفس الخطوات السابقة مع إهمال الفئات المفتوحة ، وفي بعض الأحيان قد يصادف الباحث جداول تكرارية مفتوحة يمكن تحديد الحد الأدنى للفتة الأولى فيها إذا كان الجدول مفتوحاً من أعلى وتحديد الحد الأدنى للفتة الأخيرة إذا كان الجدول مفتوحاً من أسفل .

(٢) المدرج التكراري للتوزيعات غير المتظمة :

في هذه الحالة تكون الفئات غير متساوية ولا تعبر الارتفاعات عن التكرارات ويلزم قبل البدء في الرسم الحصول على التكرارات المعدلة باستخدام العلاقة التالية :

التكرار المعدل = التكرار الأصلي ÷ طول الفتة



ونستخدم نفس الخطوات السابقة مع الأخذ في الاعتبار اختلاف أطوال الفئات على المحور الأفقي .

مثال ( ٣-٨ ) :

المطلوب تمثيل التوزيع التكراري بمدرج تكراري :

الفئة	- ٥	- ١٠	- ٢٠	- ٣٠	- ٣٥	٤٥ - ٦٥
التكرار	٥	٢٠	٤٠	٢٥	٢٠	١٥

الحل :

يلاحظ اختلاف أطوال الفئات ونبدأ بإيجاد التكرارات المعدلة كما في

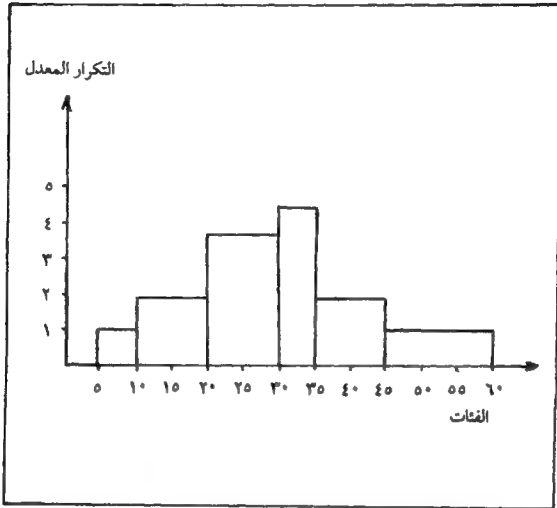
الجدول التالي :

فئات	تكرار	طول الفئة	التكرار المعدل
- ٥	٥	٥	١
- ١٠	٢٠	١٠	٢
- ٢٠	٤٠	١٠	٤
- ٣٠	٢٥	٥	٥
- ٣٥	٢٠	١٠	٢
٤٥ - ٦٥	١٥	١٥	١

ثم نرسم التكرارات المعدلة بنفس الخطوات السابقة كما يظهر في

شكل ( ٣-٩ ) .

شكل (٣-٩)  
المدرج التكراري للتوزيع غير المنتظم



ويلاحظ أننا يمكننا استخدام التكرارات المعدلة للمقارنة بدلاً من المساحات . والجدير بالذكر أن للمدرج التكراري استخدامات عديدة أهمها على الإطلاق استخدامه في حساب المنوال كما سيأتي فيما بعد .

#### ب - المضلع التكراري Frequency Polygon :

المضلع التكراري هو عبارة عن الخط المنكسر الواصل بين مراكز الفئات أو الواصل بين منتصفات القواعد العليا للمدرج التكراري . يتضح من هذا التعريف ، أنه يمكن رسم المضلع التكراري بإحدى طريقتين .

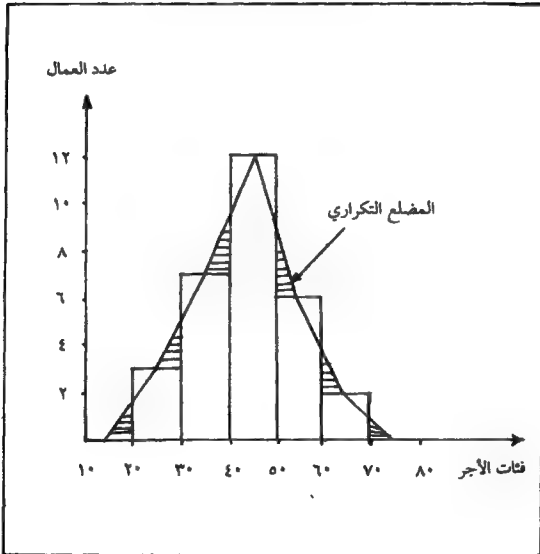
(١) طريقة غير مباشرة باستخدام المدرج التكراري .

أي بعد رسم المدرج التكراري يمكننا رسم المضلع التكراري عن طريق تصنيف القواعد العليا لكل المستطيلات التي يتكون منها المدرج ثم نصل بين هذه المنصفات بخطوط مستقيمة ( يلاحظ أن منصفات القواعد العليا تناظر مراكز الفئات ) .

وعلى سبيل المثال يمكننا تحديد المضلع التكراري لمثال (٣-٧) بالاستعانة بشكل (٣-٨) كما يتضح في الشكل التالي :-

شكل (٣-١٠)

المدرج والمضلع التكراري للتوزيع المنتظم



وبلاحظ في شكل (٣- ١٠) ما يلي :

— مساحة المثلثات التي أضيفت للمدرج = مساحة المثلثات التي قطعت منه وعليه إذا كان التوزيع التكراري منتظماً فإن :

مساحة المدرج التكراري = مساحة المضلع التكراري

— نلاحظ أننا أوصلنا طرفي المضلع التكراري بالمحور الأفقي نظراً لأن التكرار لكل من الفئة قبل الأولى والفئة بعد الأخيرة مساوٍ للصفر ومن ثم أكملنا الخطوط المستقيمة حتى منتصف هاتين الفئتين .

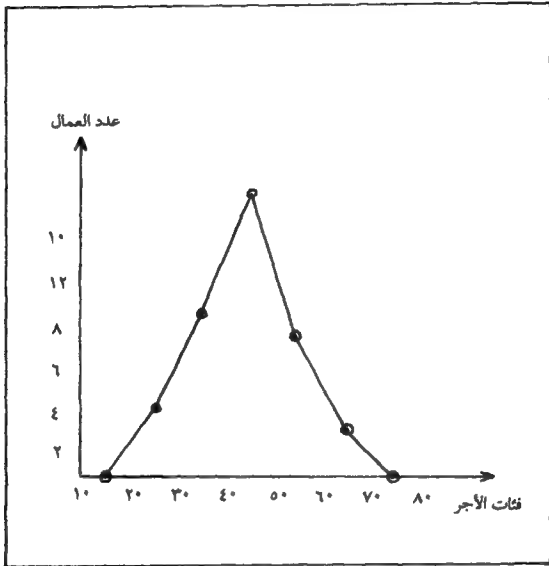
ويستخدم المضلع التكراري في مقارنة التوزيعات التكرارية ببياناً . وحتى تسهل عملية المقارنة يكون من الأفضل تمييز كل مضلع تكراري عن الآخر بإحدى وسائل الرسم المناسبة . كذلك يفضل استخدام التكرارات النسبية بدلاً من التكرارات المطلقة عندما يختلف المجموع الكلي للتكرارات بشكل واضح في التوزيعات موضع المقارنة .

(٢) طريقة مباشرة باستخدام مراكز الفئات :

بعد حساب مراكز الفئات نرسم المحورين المتعامدين ونحدد النقاط التي تكون إحداثياتها الأفقية هي مراكز الفئات وإحداثياتها الرأسية هي التكرارات المناظرة ( في حالة التوزيعات المنتظمة ) أو التكرارات المعدلة ( في حالة التوزيعات غير المنتظمة ) ويتوصل هذه النقاط بخطوط مستقيمة نحصل على المضلع التكراري .

وعلى سبيل المثال يمكننا رسم المضلع التكراري مباشرة لمثال (٣- ٧) في الشكل التالي .

شكل (٣-١١)  
المضلع التكراري لأجور عدد من العمال



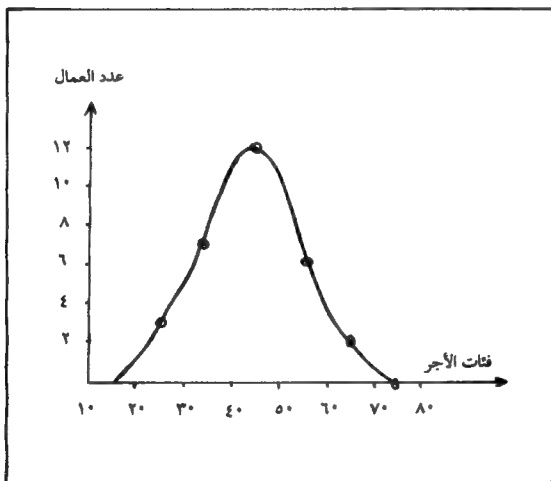
جـ - المنحنى التكراري Frequency Curve :

المنحنى التكراري هو الخط الممهد الواصل بين مراكز الفئات أو منتصفات القواعد العليا للمستطيلات التي يتكون منها المدرج التكراري ، ويمكن الحصول على المنحنى عن طريق تمهيد جميع النقاط باليد أو باستخدام قواعد هندسية بسيطة .

وبلاحظ أننا يمكننا رسم المنحنى التكراري بطريقتين كما هو الحال عند رسم المضلع التكراري . وعلى سبيل المثال شكل ( ٣ - ١٢ ) يوضح المنحنى التكراري لأجور عدد من العمال .

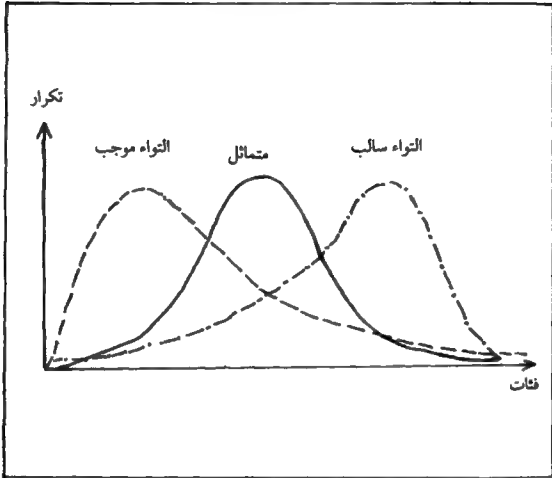
شكل ( ٣ - ١٢ )

المنحنى التكراري لأجور عدد من العمال



والمنحنى التكراري قد يكون متماثل يأخذ شكل الجرس أو الناقوس مثل المنحنى الطبيعي أو المعتاد أو يكون غير متماثل ( ملتو جهة اليمين أو جهة اليسار ) كما يتضح في شكل ( ٣ - ١٣ ) .

شكل ( ٣ - ١٣ )  
المنحنيات المتماثلة والملتوية

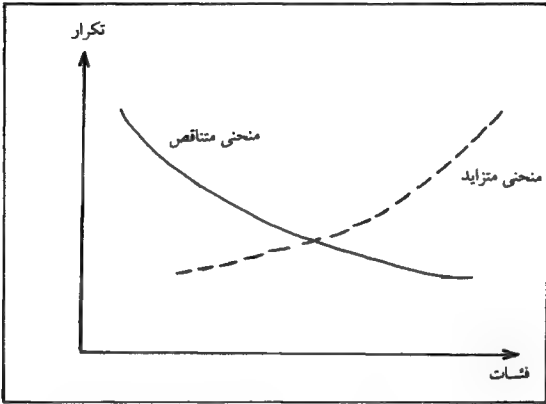


والمنحنى المتماثل هو ذلك المنحنى الذي إذا اسقطنا من قمته عموداً فإنه يقسم المنحنى إلى قسمين متساويين وأحياناً يطلق البعض اسم المنحنى موجب الالتواء على المنحنى الملتوي جهة اليمين ، والمنحنى سالب الالتواء على المنحنى الملتوي جهة اليسار .

وهناك أنواع كثيرة للمنحنيات منها مثلاً المنحنيات المتزايدة باطراد والمنحنيات المتناقصة باطراد .

و شكل ( ٣ - ١٤ ) يوضح هذه الأنواع

شكل ( ٣ - ١٤ )  
المنحنيات المتزايدة والمتناقصة



وسوف نوضح كيفية رسم مثل هذه المنحنيات في دراستنا التالية  
للمنحنيات المتجمعة .

د - المنحنيات التكرارية المتجمعة Cumulative Frequency Curves :

(١) المنحنى التكراري المتجمع الصاعد :

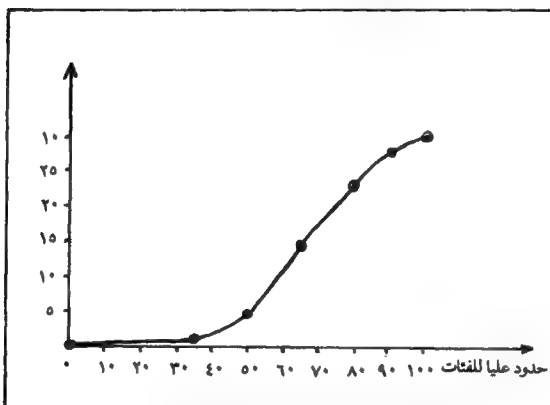
يلزم أولاً لرسم هذا المنحنى تكوين الجدول التكراري المتجمع  
الصاعد كما سبق في الفصل السابق ثم نرسم المحور الأفقي ليمثل الحدود  
العليا للفئات والمحور الرأسي ليمثل التكرارات المتجمعة الصاعدة ويجب  
مراعاة مقياس الرسم المناسب .

فمثلاً إذا أردنا رسم المنحنى للتوزيع التكراري المتجمع الصاعد



لدرجات ٣٠ طالِباً بجدول (٢-١٣) نأخذ على المحور الرأسي والذي يمثل التكرار المتجمع الصاعد كل ١ سم يمثل ٥ طلبية كما يتضح في الشكل التالي :

شكل (٣-١٥)  
المنحنى التكراري المتجمع الصاعد لدرجات ٣٠ طالِباً



وللـمنحنى التكراري المتجمع الصاعد أو الهابط استخدامات عديدة كما سيتضح فيما بعد في حساب الوسيط ونصف المدى الربيعي .

### (٢) المنحنى التكراري المتجمع الهابط :

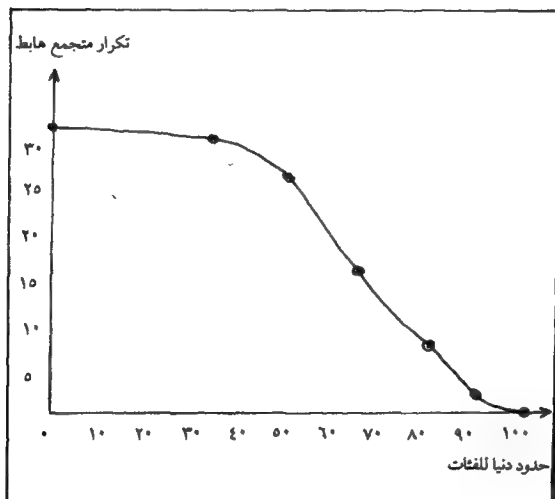
كما هو الحال في حالة المنحنى المتجمع الصاعد يلزم تكوين الجدول التكراري المتجمع الهابط أولاً لرسم هذا المنحنى .

فمثلاً لرسم المنحنى للتوزيع التكراري المتجمع الهابط لدرجات ٣٠

طالباً بجدول (٢ - ١٥) نأخذ نفس مقياس الرسم بالشكل السابق ويأخذ المنحنى التكراري المتجمع الهابط الصورة التالية :

شكل (٣ - ١٦)

المنحنى التكراري المتجمع الهابط لدرجات ٣٠ طالباً



والجدير بالذكر أنه إذا رسمنا المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والمنحنى التكراري المتجمع الهابط في شكل واحد فإن المنحنيين سوف يتقاطعان في نقطة واحدة ، وإذا اسقطنا من نقطة التقاطع عموداً على المحور الأفقي فنحصل على الوسيط وهو أحد مقياس النزعة المركزية . ويستطيع القارئ أن يجد أن الوسيط في هذا المثال يساوي ٦٥ .

## تمارين الفصل الثالث

(١) الجدول التالي يوضح تقديرات الدخل الزراعي لإحدى الدول بملايين الجنيهات عن الأعوام ١٩٨٠ - ١٩٨٤ .

١٩٨٤	١٩٨٣	١٩٨٢	١٩٨١	١٩٨٠	السنة جملة الدخل
٩٠	١٢٠	١٦٠	١٩٠	١٥٠	القطن
٢٩٠	٢٧٠	٢٧٠	٢٨٠	٢٦٠	موارد أخرى
٣٨٠	٣٩٠	٤٣٠	٤٧٠	٤١٠	المجموع

والمطلوب : تمثيل هذه البيانات بشكل بياني مناسب .

(٢) من الجدول التكراري التالي :

٧٥-٦٥	- ٥٥	- ٤٥	- ٣٥	- ٢٥	- ١٥	- ٥	فئات
١١	١٨	٣٠	٤٥	٢٥	١٩	١٢	تكرار

والمطلوب :

أ - رسم المدرج التكراري والمضلع التكراري والمنحنى التكراري .

ب - رسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والهابط .

(٣) المطلوب رسم المدرج والمنحنى التكراري للتوزيع التالي :

الفئات	١٨ -	٢٠ -	٢٥ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ فأكثر
التكرار	٨	٧٥	٨٥	٧٠	٣٠	١٠

(٤) الجدول التالي يبين توزيع ١٠٠ شركة حسب حجم مبيعاتها السنوية :

جولة المبيعات بالآلاف جنيه	١٠ -	٢٠ -	٢٥ -	٣٠ -	٣٥ -	٤٠ - ٤٥
عدد الشركات	٨	١٢	٢٠	٢٥	١٩	١٦

والمطلوب :

أ - ارسم منحنى التكرار الصاعد والهابط .

ب - حدد من الرسم عدد الشركات التي يبلغ رقم مبيعاتها أكثر من ٢٢ ألف جنيه .

جـ - أوجد نسبة الشركات التي تقل مبيعاتها عن ٣٥ ألف جنيه .

(٥) فيما يلي عدد السكان التقديري في مصر في أول يوليو من كل سنة خلال ١٩٦٥ - ١٩٧٠ .

السنة	١٩٦٥	١٩٦٦	١٩٦٧	١٩٦٨	١٩٦٩	١٩٧٠
عدد السكان بالمليون	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤

والمطلوب عرض هذه البيانات بيانياً .

(٦) الجدول الآتي يعطي التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى المؤسسات .

العمر بالسنوات	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٥-٥٠
عدد الموظفين	١٦	٢١	٣٧	٥١	٤٢	٢٤	٩

والمطلوب :

أ - أوجد جدول التكرار النسبي .

ب - أوجد جدول التكرار المتجمع النسبي الصاعد والهابط .

جـ - احسب نسبة عدد الموظفين الذين يقل أعمارهم عن ٣٧ سنة .

(٧) إذا كانت قيم الصادرات والواردات (بالمليون دولار) في دولة ما يلخصها الجدول التالي :

	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦
الصادرات	٢٦٠٠	٢٧٠٠	٤٨٥٠	٥٥٠٠	٤١٠٠
الواردات	١٢٠٠	١١٠٠	١١٥٠	١٥٠٠	١٦٥٠

والمطلوب :

أ - تمثيل هذه البيانات باستخدام طريقة المستطيلات .

ب - تمثيل هذه البيانات باستخدام طريقة الخط البياني .



## الفصل الرابع

### مقاييس النزعة المركزية

#### Measures of Central Tendency

#### مقدمة :

يبدأ البحث بجمع المعلومات والبيانات عن الظاهرة موضوع البحث ثم تلخيص وتبويب هذه البيانات في صورة توزيعات تكرارية مختلفة ثم تمثيلها بيانياً . وقد تكون هذه المرحلة كافية للحصول على المعلومات حول الظاهرة المدروسة غير أننا وفي أكثر المناسبات نحتاج إلى تلخيص المعلومات الواردة في الجداول التكرارية بصورة أكبر وذلك بفرض استخدامها في مقارنة معلومات واردة في جدولين تكراريين أو أكثر والحكم على اختلافها أو تقاربها وهنا تأتي المرحلة التالية من خطوات البحث الاحصائي والتي تلخص التوزيع التكراري بقيمة واحدة .

وللقيام بهذا نبحث عن قيمة متوسطة تعبر عن هذا التوزيع وتسمى المتوسط Average وهي القيمة التي تتجمع حولها قيم الظاهرة ومن هنا يسمى هذا الميل إلى التجمع حول المتوسط بالنزعة المركزية ويفضل أن يتوافر في المتوسط الشروط التالية :

(١) ألا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة .

(٢) يسهل حسابه ومعالجته جبرياً .

(٣) أن يأخذ في الاعتبار جميع المفردات التي تتكون منها الظاهرة .

(٤) يمكن حسابه بسرعة وسهولة .

(٥) أن يكون له معنى وخواص مميزة .

وتوجد عدة مقاييس للترعة المركزية أهمها :

Arithmetic Mean (١) الوسط الحسابي

Median (٢) الوسيط

Mode (٣) المنوال

Geometric Mean (٤) الوسط الهندسي

Harmonic Mean (٥) الوسط التوافقي

وسوف نتناول هذه المقاييس سواء للتوزيعات المبوبة أو غير المبوبة .



### أولاً : الوسط الحسابي Arithmetic Mean

هو أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها شيوعاً واستخداماً في كثير من المجالات الإحصائية ويستخدم العامة لفظ المتوسط على أنه الوسط الحسابي كما أنه أقرب المقاييس تحقيقاً للشروط السابقة .

أ - الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة :

(١) الطريقة المباشرة :

الوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو مجموع هذه القيم مقسوماً على عددها أي أن :

$$\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}} = \text{الوسط الحسابي}$$

فإذا كان لدينا (ن) من القيم هي  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ، سن

فإن الوسط الحسابي ( وسنرمز له بالرمز  $\bar{x}$  ) هو

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

(٤-١)

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\text{مجموع } x}{n}}$$

مثال ( ٤ - ١ ) :

احسب الوسط الحسابي للقيم التالية :

$$١٠ ، ١١ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١٢$$

الحل :

$$\bar{x} = \frac{١٠ + ١١ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١٢}{٦} = \frac{٦٠}{٦} = ١٠$$

مثال ( ٤ - ٢ ) :

احسب الوسط الحسابي للقيم :

$$٦٨٥ ، ٦٧٥ ، ٦٦٥ ، ٦٥٥ ، ٦٤٥$$

الحل :

$$\bar{x} = \frac{٦٨٥ + ٦٧٥ + ٦٦٥ + ٦٥٥ + ٦٤٥}{٥} = \frac{٣٣٢٥}{٥} = ٦٦٥$$

(٢) طريقة الانحرافات أو الفروق البسيطة :

الهدف من هذه الطريقة والطريقة التالية هو تسهيل واختصار العمليات الحسابية وتقوم هذه الطريقة على خاصية أساسية من خصائص الوسط الحسابي وهي أن طرح ( أو جمع ) مقدار ثابت من قيم المتغير يؤدي إلى نقص ( أو زيادة ) الوسط الحسابي الناتج بقيمة هذا الثابت ، وتتلخص خطوات هذه الطريقة على النحو التالي :-

١ - نختار وسط فرضي مناسب وسنرمز له بالرمز ( أ ) وليس هناك قواعد محددة تحكم اختيار هذا الوسط ولكن يمكن اختياره على أساس قربه من متوسط مجموعة القيم أو على أساس أكثر القيم تكراراً .

٢ - بطرح هذا الوسط من جميع القيم فنحصل على الانحرافات أو الفروق البسيطة وسنرمز لها بالرمز (ح = س - أ) ونحصل على مجموع هذه الانحرافات .

٣ - نطبق العلاقة التالية في حساب الوسط الحسابي .

(٢-٤)

$$\bar{م} = أ + \frac{\text{مجم ح}}{ن}$$

حيث (ح) ترمز إلى الانحرافات البسيطة .

( أ ) ترمز إلى الوسط الفرضي .

مثال (٤-٣) :

احسب الوسط الحسابي لمثال (٢-٤) .

الحل :

باختيار وسط فرضي وليكن  $أ = ٦٤٥$

٦٨٥	٦٧٥	٦٦٥	٦٥٥	٦٤٥	قيم س
٤٠	٣٠	٢٠	١٠	صفر	ح = س - أ

$$\bar{م} = أ + \frac{\text{مجم ح}}{ن}$$

$$٦٤٥ + ٢٠ = ٦٤٥ + \frac{١٠٠}{٥} =$$

$$٦٦٥ = \text{وهي نفس النتيجة السابقة}$$

حل آخر : باختبار القيمة المتوسطة كوسط فرضي (أ = ٦٦٥)

٦٨٥	٦٧٥	٦٦٥	٦٥٥	٦٤٥	س
٢٠	١٠	صفر	١٠-	٢٠-	ح

$$\therefore \bar{س} = \frac{\text{مجم}}{ن} + ١$$

$$= \frac{\text{صفر}}{٥} + ٦٦٥$$

$$= ٦٦٥ \text{ وهي نفس النتيجة السابقة}$$

وبلاحظ أننا حصلنا على نفس النتيجة في جميع الحالات ويستطيع القارئ أن يتحقق بنفسه إذا اختار وسطاً آخر أي أن قيمة الوسط الحسابي تظل ثابتة ولا تختلف باختلاف الوسط الفرضي المستخدم .

(٣) طريقة الانحرافات أو الفروق المختصرة :

يمكن استخدام هذه الطريقة لتسهيل أكثر في العمليات الحسابية إذا كانت الانحرافات البسيطة تقبل القسمة على مقدار ثابت وليكن (ث) وتتلخص خطوات هذه الطريقة فيما يلي :

- نضع قيم المفردات في العمود الأول .
- نحسب الانحرافات البسيطة ونضعها في العمود الثاني .
- نختار العامل المشترك (ث) الذي تقبل القسمة عليه جميع الانحرافات البسيطة فنحصل على الانحرافات المختصرة أو المختزلة وسنرمز لها بالرمز (ح') في عمود ثالث .

٢- ثم نطبق العلاقة التالية لحساب الوسط الحسابي .

(٣-٤)

$$\bar{X} = 1 + \left( \frac{\sum f_j X_j}{N} \right)$$

حيث  $\bar{X}$  الانحرافات المختزلة أو المختصرة ( $\frac{X_j}{N}$ )  
 $1$  الوسط الفرضي  
 $\sum f_j$  العامل المشترك  
 $N$  عدد القيم

مثال (٤-٤) :

احسب الوسط الحسابي لمثال (٢-٤) .

الحل :

كما فعلنا في حل مثال (٣-٤) وباختيار  $1 = X_j$  ،  $N = 10$

$\frac{X_j}{10} = \frac{X_j}{N}$	$X_j$	م
صفر	صفر	٦٤٥
١	١٠	٦٥٥
٢	٢٠	٦٦٥
٣	٣٠	٦٧٥
٤	٤٠	٦٨٥
١٠	١٠٠	

$$\begin{aligned}\bar{س} &= \frac{\text{مجم}'}{ن} + 1 \\ 640 + \left( 10 \times \frac{10}{0} \right) &= \\ 660 &= 640 + 20 =\end{aligned}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل .

والجدير بالذكر أننا أردنا من اختيارنا للمقدار ( 660 ) كوسط فرضي في الحل الآخر لمثال ( 4 - 3 ) أن نثبت إحدى الخصائص الأساسية للوسط الحسابي وهي مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً أي أن :

$$\text{مجم} (س - \bar{س}) = \text{صفر دائماً}$$

ويمكن إثباتها جبرياً بسهولة على النحو التالي : -

$$\begin{aligned}\text{الطرف الأيمن} &= \text{مجم} (س - \bar{س}) \\ &= \text{مجم} س - \bar{س} ن \\ &= \text{صفر} \\ \text{الطرف الأيسر} &= \text{مجم} (س - \bar{س}) \\ &= \text{صفر} \\ \text{لأن } \bar{س} &= \frac{\text{مجم} س}{ن}\end{aligned}$$

ب - الوسط الحسابي للبيانات المبوبة :

هناك ثلاث طرق لحساب الوسط الحسابي من الجداول التكرارية كما هو الحال بالنسبة للبيانات غير المبوبة وعلى القارئ أن يختار الطريقة المناسبة على ضوء البيانات المتاحة .

(١) الطريقة المباشرة :

وتتلخص خطواتها على النحو التالي :

- نضع الفئات والتكرار في العمودين الأول والثاني .
- نحسب مراكز الفئات ونرمز له بالرمز (س) ونضعه في عمود ثالث  
[ مركز الفئة = ( الحد الأدنى + الحد الأعلى )  $\div$  ٢ ] .
- نضرب مركز كل فئة في التكرار المناظر ونحصل على مجموع  
حواصل الضرب ( مجس ك ) في عمود رابع .
- ثم تطبق العلاقة التالية لحساب الوسط الحسابي .

$$\bar{x} = \frac{\text{مجس ك}}{\text{مجم ك}} \quad (٤ - ٤)$$

مثال ( ٤ - ٥ ) :

احسب الوسط الحسابي من الجدول التكراري الذي يوضح التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى الشركات .

العمر بالسنوات	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-٥٥
عدد الموظفين	١٦	٢١	٣٧	٥١	٤٢	٢٤	٩

الحل :

جدول ( ٤ - ١ )

حساب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة

فئات	تكرار ك	مراكز الفئات س	س ك
٢٠ -	١٦	٢٢,٥	٣٦٠
٢٥ -	٢١	٢٧,٥	٥٧٧,٥
٣٠ -	٣٧	٣٢,٥	١٢٠٢,٥
٣٥ -	٥١	٣٧,٥	١٩١٢,٥
٤٠ -	٤٢	٤٢,٥	١٧٨٥
٤٥ -	٢٤	٤٧,٥	١١٤٠
٥٠ - ٥٥	٩	٥٢,٥	٤٧٢,٥
المجموع	٢٠٠		٧٤٥٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجم س ك}}{\text{مجم ك}}$$

$$٣٧,٢٥ = \frac{٧٤٥٠}{٢٠٠} =$$

ويلاحظ صعوبة عملية الضرب يدوياً في هذه الطريقة ولتبسيط ذلك

نتبع إحدى الطريقتين التاليتين :



## (٢) طريقة الانحرافات أو الفروق البسيطة :

تقوم هذه الطريقة على اختيار وسط فرضي مناسب من بين قيم مراكز الفئات وكما أوضحنا من قبل أن قيمة الوسط الحسابي لا تختلف باختلاف الوسط الفرضي ، وفي حالة التوزيعات التكرارية المتماثلة أو القرية من التماثل يفضل اختيار مركز الفئة المواجهة لأكبر تكرار كوسط فرضي حتى يكون مجموع الانحرافات أقل ما يمكن لتسهيل الحل وتتلخص خطوات هذه الطريقة فيما يلي :

- نضع الفئات والتكرار في العمودين الأول والثاني .
- نحسب مراكز الفئات (س) في عمود ثالث كما سبق .
- نحدد الوسط الفرضي (أ) ثم نحسب انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الفرضي (ح = س - أ) في عمود رابع .
- نضرب كل انحراف في تكرار الفئة المقابلة له ثم نحصل على مجموع حواصل الضرب (مجم ك) في عمود خامس ثم نطبق العلاقة التالية لحساب الوسط الحسابي .

$$(٤ - ٥) \quad \boxed{\bar{س} = \frac{\text{مجم ك}}{\text{مجم أ}} + أ}$$

مثال (٤ - ٦) :

احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات البسيطة لمثال

(٤ - ٥) .

الحل :

جدول ( ٤ - ٢ )

حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات البسيطة

فئات العمر	عدد الموظفين ك	مركز الفئات س	انحرافات بسيطة ح = س - أ	ح ك
٢٠ -	١٦	٢٢,٥	١٥ -	٢٤٠ -
٢٥ -	٢١	٢٧,٥	١٠ -	٢١٠ -
٣٠ -	٣٧	٣٢,٥	٥ -	١٨٥ -
٣٥ -	٥١	٣٧,٥	صفر	صفر
٤٠ -	٤٢	٤٢,٥	٥	٢١٠
٥٠ - ٥٥	٩	٥٢,٥	١٥	١٣٥
المجموع	٢٠٠			٥٠ -

الوسط الفرضي = أ = ٣٧,٥

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع ك} + \text{مجموع ح}}{\text{مجموع ك}}$$

$$= \frac{٥٠ - + ٣٧,٥}{٢٠٠}$$

$$= ٣٧,٢٥ = ٣٧,٥ + ,٢٥ -$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بالطريقة المباشرة .

### (٣) طريقة الانحرافات أو الفروق المختصرة :

إذا كانت الانحرافات البسيطة تقبل القسمة على عامل مشترك يمكن استخدام طريقة الانحرافات المختصرة ويحدث ذلك دائماً في حالة التوزيعات المنتظمة حيث أطوال الفئات متساوية ويكون العامل المشترك مساوياً لطول الفئة . وتتلخص خطوات هذه الطريقة كما يلي :

- نضع الفئات والتكرارات في العمودين الأول والثاني .
- نحسب مراكز الفئات كما سبق في عمود ثالث .
- نحسب الانحرافات البسيطة في عمود رابع .
- بعد اختيار المقدار الثابت أو العامل المشترك (ث) نقسم جميع الانحرافات البسيطة على هذا المقدار فنحصل على الانحرافات المختصرة في عمود خامس .
- نقوم بضرب الانحرافات المختصرة في التكرارات المناظرة ونحصل على مجموع حواصل الضرب (مجمـح/ك) ثم نطبق العلاقة التالية لحساب الوسط الحسابي :

$$(٦-٤) \quad \bar{x} = \frac{\text{مجمـح/ك}}{\text{مجمـك}} \times (\text{ث}) + ١$$

مثال (٧-٤) :

احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة لمثال (٥-٤) .

الحل :

جدول ( ٤ - ٣ )

حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة

فئات	تكرار ك	مراكز الفئات م	انحرافات بسيطة ح = م - أ	انحرافات مختصرة $\frac{ح}{٥} = \text{ح}'$	ح' ك
٢٠ -	١٦	٢٢,٥	١٥ -	٣ -	٤٨ -
٢٥	٢١	٢٧,٥	١٠ -	٢ -	٤٢ -
٣٠ -	٣٧	٣٢,٥	٥ -	١ -	٣٧ -
٣٥	٥١	٣٧,٥	صفر	صفر	صفر
٤٠	٤٢	٤٢,٥	٥	١	٤٢
٤٥ -	٢٤	٤٧,٥	١٠	٢	١٨
٥٥ - ٥٠	٩	٥٢,٥	١٥	٣	٢٧
المجموع	٢٠٠				١٠ -

$$أ = ٣٧,٥ \quad , \quad ث = ٥$$

$$م = \left( \frac{\text{مجموع ح' ك}}{\text{مجموع ك}} \right) + (ث \times أ)$$

$$= ٣٧,٥ + \left( ٥ \times \frac{١٠ -}{٢٠٠} \right) =$$

$$= ٣٧,٥ + ٢٥ - =$$

$$= ٣٧,٢٥$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بالطريقتين السابقتين .

الوسط الحسابي في حالة التوزيعات غير المنتظمة :

نطبق نفس القواعد السابقة ويلاحظ أننا لا نجري تعديلاً للتكرارات بل نحسب مراكز الفئات ونتبع نفس خطوات الحل كما في حالة التوزيعات المنتظمة إلا أنه قد يصعب تطبيق طريقة الانحرافات المختصرة نظراً لاختلاف أطوال الفئات .

مثال ( ٤ - ٨ ) :

احسب الوسط الحسابي للتوزيع التكراري :

فئات	- ١٠	- ١٢	- ١٤	- ١٨	٢٠ - ٢٤
تكرار	٤٠	٥٠	٦٠	٣٠	٢٠

الحل :

جدول ( ٤ - ٤ )

حساب الوسط الحسابي للتوزيع غير المنتظم بالطريقة المباشرة

فئات	تكرار ك	مراكز الفئات س	س ك
- ١٠	٤٠	١١	٤٤٠
- ١٢	٥٠	١٣	٦٥٠
- ١٤	٦٠	١٦	٩٦٠
- ١٨	٣٠	١٩	٥٧٠
٢٤ - ٢٠	٢٠	٢٢	٤٤٠
المجموع	٢٠٠		٣٠٦٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجمد ك}}{\text{مجدك}}$$

$$١٥,٣ = \frac{٣٠٦٠}{٢٠٠} =$$

حل آخر :

جدول (٤ - ٥)

حساب الوسط الحسابي للتوزيع  
غير المنتظم بطريقة الانحرافات البسيطة

فئات	تكرار ك	مراكز الفئات س	انحرافات بسيطة ح = س - ١٦	ح ك
١٠ -	٤٠	١١	٥ -	٢٠٠ -
١٢ -	٥٠	١٣	٣ -	١٥٠ -
١٤ -	٦٠	١٦	صفر	صفر
١٨ -	٣٠	١٩	٣	٩٠
٢٠ - ٢٤	٢٠	٢٢	٦	١٢٠
المجموع	٢٠٠			١٤٠ -

$$\bar{س} = \frac{\text{مجمد ك}}{\text{مجدك}} + ١$$

$$١٦ + \frac{١٤٠ -}{٢٠٠} =$$

$$١٥,٣ = ١٦ + ٧ - =$$

وهي نفس النتيجة السابقة .

## ملاحظات :

- ١ - لاحظنا من العرض السابق أن مجموع انحرافات ( فروق ) القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفرأ ، باستخدام هذه الخاصية يمكن تعريف الوسط الحسابي بأنه المقياس الاحصائي الذي إذا حسبنا انحرافات القيم عنه كان مجموع هذه الانحرافات يساوي صفر .
- ٢ - مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي أقل من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي مقدار آخر .
- ٣ - لا يمكن حساب الوسط الحسابي باستخدام الرسم البياني على عكس الوسيط والمنوال كما سنرى فيما بعد .
- ٤ - لا يمكن حساب الوسط الحسابي من الجداول التكرارية المفتوحة نظراً لصعوبة تحديد مراكز الفئات المناظرة لها .
- ٥ - يلاحظ عند حساب الوسط الحسابي أنه يأخذ في اعتباره جميع قيم المجموعة ومن ثم يتأثر بأي قيمة شاذة أو متطرفة بين مفردات المجموعة .

## ثانياً : الوسيط Median

الوسيط هو القيمة التي تتوسط مجموعة من القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً أو هو القيمة التي عدد المفردات التي أقل منها يساوي عدد المفردات التي أكبر منها .

وتختلف طرق حساب قيمة الوسيط باختلاف طبيعة البيانات .

أ - حساب الوسيط من البيانات غير المبوبة :

١ - إذا كان عدد القيم (ن) فردي فإن الوسيط هو قيمة المفردة التي ترتيبها  $\frac{1 + ن}{2}$

مثال ( ٤ - ٩ ) :

احسب الوسيط للقيم التالية :

١٩ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٤ ، ١٥

الحل :

نرتب القيم تصاعدياً على النحو التالي :

١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٩

وحيث أن عدد القيم (٥) فإن ترتيب الوسيط =  $\frac{1 + 5}{2} = 3$

يتضح أن القيمة التي ترتيبها التصاعدي أو التنازلي ٣ هي ١٥

∴ الوسيط = ١٥



٢ - إذا كان عدد القيم (ن) زوجياً فإن الوسيط هو الوسط الحسابي

$$\text{للمفردتين التي ترتيبهما } \frac{ن}{٢} ، \frac{ن}{٢} + ١$$

مثال (٤ - ١٠) :

احسب الوسيط للقيم التالية : -

$$٢١٩ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٧$$

الحل :

نرتب القيم تصاعدياً على النحو التالي :

$$١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ٢١٩$$

الوسيط هو متوسط القيمتين التي ترتيبهما الثالث والرابع

$$\therefore \text{الوسيط} = \frac{١٦ + ١٥}{٢} = ١٥,٥$$

ويلاحظ أن قيمة الوسيط لم تتأثر بالقيمة الشاذة أو المتطرفة الموجودة بالمجموعة على عكس الوسط الحسابي .

ب - حساب الوسيط من البيانات المبوية :

لحساب الوسيط من التوزيعات التكرارية سواء كانت منتظمة أو غير منتظمة هناك طريقتان احدهما بالحساب والأخرى بالرسم .

١ - طريقة الحساب :

وتتلخص هذه الطريقة في الخطوات التالية :

- تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد أو الهابط .

$$\text{نحسب ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجمك}}{٢}$$

٢ - نحدد الفئة الوسيطة التي يقع فيها الوسيط ثم نحدد قيمة الوسيط كما يتضح في المثال التالي .

مثال ( ٤ - ١١ ) :

احسب الوسيط للتوزيع التكراري الذي يوضح التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى الشركات في مثال ( ٤ - ٥ ) .

الحل :

١ - تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد
أقل من ٢٠	صفر
أقل من ٢٥	١٦
أقل من ٣٠	٣٧
أقل من ٣٥	٧٤
أقل من ٤٠	١٢٥
أقل من ٤٥	١٦٧
أقل من ٥٠	١٩١
أقل من ٥٥	٢٠٠

٢ - نحدد ترتيب الوسيط باستخدام العلاقة :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجمك}}{٢} = \frac{٢٠٠}{٢} = ١٠٠$$

٢ - يلاحظ من استعراض التكرار المتجمع الصاعد أن الفئة الوسيطة هي ٣٥ - ٤٠ لأن ترتيب الوسيط يقع بين ٧٤ ، ١٢٥ كما أن موقع الوسيط بين ٣٥ ، ٤٠ كموقع ١٠٠ بين ٧٤ ، ١٢٥ وهذا يعني أن الوسيط (٢) يقسم المسافة بين ٣٥ ، ٤٠ بنفس النسبة التي تقسم بها ١٠٠ المسافة بين ٧٤ ، ١٢٥ ويمكن التعبير عن هذه النسبة على النحو التالي :

$$\begin{array}{c|c} ٧٤ & ٣٥ \\ ١٠٠ & ٢ \\ ١٢٥ & ٤٠ \end{array}$$

$$\frac{٧٤ - ١٠٠}{٧٤ - ١٢٥} = \frac{٣٥ - ٢}{٣٥ - ٤٠}$$

$$\text{بضرب الطرفين في ٥} \quad \frac{٢٦}{٥١} = \frac{٣٥ - ٢}{٥}$$

$$٢,٥٥ + ٣٥ = \frac{١٣٠}{٥١} + ٣٥ = ٢$$

$$\therefore \text{الوسيط} = ٣٧,٥٥$$

يتبع من الحل السابق أنه يمكننا حساب الوسيط مباشرة باستخدام العلاقة التالية :-

$$\text{الحد الأدنى للفئة الوسيطة} + \left( \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{ك}}{\text{ك} - \text{ك}_1} \right) \times \text{طول الفئة الوسيطة}$$

حيث : ك<sub>١</sub> = التكرار المتجمع عند بداية الفئة الوسيطة .  
ك<sub>٢</sub> = التكرار المتجمع عند نهاية الفئة الوسيطة .

## ٢ - طريقة الرسم :

سبق الإشارة إلى أنه يمكن استخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد في حساب قيمة الوسيط وكل من الربيع الأعلى والأدنى وتتلخص خطوات ذلك فيما يلي :

- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد ثم رسم المنحنى المتجمع الصاعد .

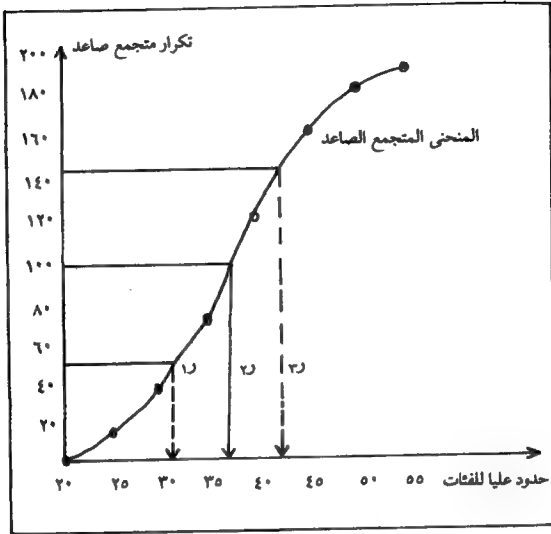
- تحديد ترتيب الوسيط وتحديد موضعه على المحور الرأسي الذي يمثل التكرار المتجمع الصاعد .

- نأخذ خط مستقيم من هذا الموقع يوازي المحور الأفقي الذي يمثل الحدود العليا للفئات فيقطع المنحنى المتجمع الصاعد في نقطة إذا أسقطنا منها عموداً على المحور الأفقي نحصل على قيمة الوسيط .

مثال ( ٤ - ١٢ ) :

أوجد الوسيط بالرسم للمثال السابق : -

شكل ( ٤ - ١ )  
حساب الوسيط بالرسم



يلاحظ من شكل ( ٤ - ١ ) أن الوسيط = ٣٧,٥ تقريباً . كما يجدر الإشارة إلى أن الوسيط لا يتأثر بالقيم الشاذة ويمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة على عكس الوسيط الحسابي . ويستخدم الرسم أيضاً في تقدير قيمتي الربيع الأول ( ١ ) والربيع الثالث ( ٣ ) كما سيتضح فيما بعد في الفصل الخامس .

### ثالثاً : المنوال Mode

المنوال هو أكثر القيم تكراراً أو شيوعاً بين مفردات مجموعة من القيم .

أ- حساب المنوال من البيانات غير المبوبة :

باستخدام التعريف السابق نبحث عن أكثر القيم تكراراً أو ظهوراً .

مثال ( ٤ - ١٣ ) :

أوجد المنوال للمجموعات التالية من القيم :

- (أ) ٤ ، ٢ ، ٧ ، ١ ، ٥ ، ٣ ، ٦ ، ٤  
(ب) ١٥١ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ، ٦ ، ٥ ، ٦ ، ١٥١  
(ج) ٩ ، ٦ ، ٤ ، ٣ ، ٩ ، ٢ ، ٩ ، ٩

الحل :

نجد أنه لا يوجد منوال للمجموعة الأولى وهناك قيمتان للمنوال للمجموعة الثانية هما ٦ ، ٥ بينما يوجد قيمة واحدة للمنوال في المجموعة الثالثة وهي ٩ . وفي الحالتين الأوليين لا يمكن اعتبار المنوال مقياساً للتنزعة المركزية . ويتضح من المجموعة (ب) أن المنوال أقل مقاييس التنزعة المركزية تأثيراً بالقيم الشاذة .

ب - حساب المنوال من البيانات المبوية :

هناك طريقتان لحساب المنوال بالرسم أو بالحساب سواء كانت التوزيعات التكرارية منتظمة أو غير منتظمة إلا أنه يلزم حساب التكرارات المعدلة أولاً في حالة التوزيعات غير المنتظمة .

(١) طريقة الحساب :

وهناك طرق عديدة لإيجاد المنوال بالحساب أهمها طريقة الفروق « بيرسون » وطريقة الرافعة وسوف نركز في حسابنا على طريقة الرافعة .

ومضمون هذه الطريقة ما يلي :

نمثل الفئة المنوالية ( التي تواجه أكبر تكرار ) برافعة تعمل عند طرفيها قوتان احدهما التكرار السابق للفئة المنوالية ويعمل عند بدايتها والثانية التكرار اللاحق للفئة المنوالية ويعمل عند نهايتها ، ثم نفترض أن المنوال يقع على بعد (س) من بداية الفئة المنوالية .

∴ البعد الآخر = طول الفئة - س

ثم نستخدم العلاقة :

القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى في مجهول واحد (س) ويمكن بعد ذلك الحصول على المنوال بالعلاقة :

المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

مثال ( ٤ - ١٤ ) :

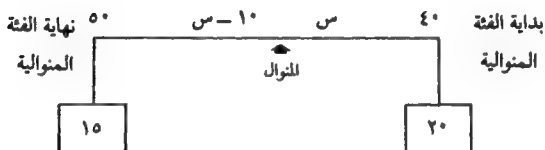
احسب المنوال من التوزيع التكراري التالي :

فئات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	٧٠-٨٠
تكرار	٨	١٢	٢٠	٢٥	١٥	١٣	٧

الحل :

١ - يلاحظ أن التوزيع شبه منتظم وأن أكبر تكرار هو ٢٥ وعليه فإن الفئة المنوالية هي ٤٠ - ٥٠

٢ - بتطبيق طريقة الرافعة :



$$\text{القوة} \times \text{ذراعها} = \text{المقاومة} \times \text{ذراعها}$$

$$٢٥ \times \text{س} = (١٠ - \text{س}) \times ١٥$$

$$٢٥ \text{ س} = ١٥٠ - ١٥ \text{ س}$$

$$٣٥ \text{ س} = ١٥٠$$

$$\text{س} = \frac{١٥٠}{٣٥} = ٤,٣$$

∴ المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

$$٤٤,٣ = ٤٠ + ٤,٣ =$$



ملاحظة :

يمكن اختصار طريقة الرافعة لحساب المنوال مباشرة باستخدام

العلاقة :

$$\text{المنوال} = \text{بداية الفئة المنوالية} + \frac{ك_2}{ك_1 + ك_2} \times (\text{طول الفئة المنوالية})$$

حيث :  $ك_1$  = التكرار السابق لأكبر تكرار

$ك_2$  = التكرار اللاحق لأكبر تكرار.

وباستخدام المثال السابق يمكن تقدير قيمة المنوال باستخدام هذه

العلاقة على النحو التالي :

$$\text{المنوال} = ٤٠ + \left( \frac{١٥}{١٥ + ٢٠} \right) \times ١٠$$

$$٤٤,٣ = ٤٠ + \frac{١٥٠}{٣٥} = ٤٠ + ٤,٣ = ٤٤,٣$$

٢ - طريقة الرسم :

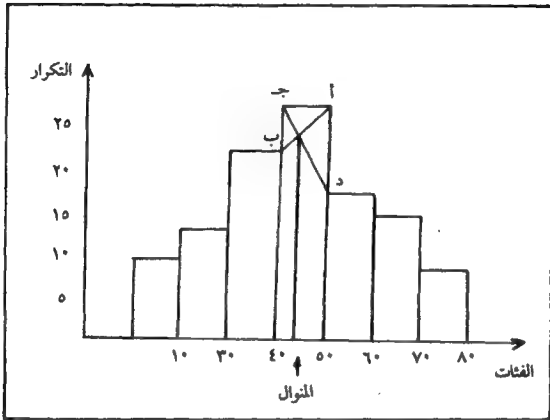
سبق الإشارة إلى أنه يمكن استخدام المدرج التكراري في إيجاد المنوال بالرسم وفي الواقع فإنه يمكننا الاكتفاء برسم ثلاث فئات فقط وهي الفئة المنوالية والسابقة عليها واللاحقة لها لتحديد قيمة المنوال بالرسم ويلزم تعديل التكرارات أولاً في حالة التوزيعات التكرارية غير المنتظمة .

مثال ( ٤ - ١٥ ) :

ارسم المدرج التكراري واشتق منه المنوال للتوزيع التكراري في مثال

( ٤ - ١٤ ) .

شكل ( ٤ - ٢ )  
المدرج التكراري وإيجاد المنوال



ويتضح في شكل ( ٤ - ٢ ) أنه يمكن تحديد المنوال بعد رسم المدرج التكراري بتوصيل المستقيم ( أ ب ، ج د ) فيقاطعان في نقطة نسقط منها عموداً على المحور الأفقي فنحصل على قيمة المنوال ، ومن الرسم المنوال = ٤٤ تقريباً .

مثال ( ٤ - ١٦ ) :

احسب المنوال للتوزيع التكراري في مثال ( ٤ - ٨ ) .

الحل :

يتضح أن هذا التوزيع غير منتظم ويلزم تعديل التكرار أولاً قبل البحث عن الفئة المنوالية .

فئات	تكرار	طول الفئة	تكرار معدل
١٠ -	٤٠	٢	٢٠
١٢ -	٥٠	٢	٢٥
١٤ -	٦٠	٤	١٥
١٨ -	٣٠	٢	١٥
٢٠ - ٢٤	٢٠	٤	٥

الفئة المنوالية ( التي تواجه أكبر تكرار معدل ) هي ١٢ - ١٤ ويتطبيق طريقة الرافعة :

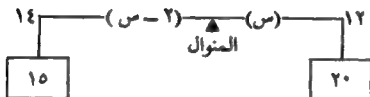
$$\text{القوة} \times \text{ذراعها} = \text{المقاومة} \times \text{ذراعها}$$

$$٢٠ \text{ س} = ١٥ (٢ - \text{س})$$

$$٢٠ \text{ س} = ٣٠ - ١٥ \text{ س}$$

$$٣٥ = ٣٠ \text{ س}$$

$$\text{س} = \frac{٣٠}{٣٥} = ٠,٨٦$$



∴ المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

$$١٢,٨٦ = ٨٦ + ١٢ =$$

## رابعاً : الوسط الهندسي Geometric Mean

الوسط الهندسي لمجموعة من القيم عددها (ن) هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم . والوسط الهندسي أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداماً في بعض التطبيقات الاحصائية الهامة مثل الأرقام القياسية ومعدلات النمو السكاني .

أ - حساب الوسط الهندسي من البيانات غير المبوية :

إذا كان لدينا عدد (ن) من قيم متغير ما هي :

س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، ..... ، س<sub>ن</sub> فإن الوسط الهندسي وسنرمز له بالرمز (د) هو :

$$D = \sqrt[n]{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n} \quad (4-7)$$

ويمكن الوصول إلى الحل باستخدام جداول اللوغاريتمات أو الآلات الحاسبة .

مثال ( ٤ - ١٧ ) :

أوجد الوسط الهندسي للأعداد ٦ ، ٥ ، ٣ ، ٧ ، ١٠ .

$$\text{الحل : } D = \sqrt[5]{10 \times 7 \times 3 \times 5 \times 6}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\text{لود} = \frac{1}{5} (\text{لو} 6 + \text{لو} 5 + \text{لو} 3 + \text{لو} 7 + \text{لو} 10)$$

$$= \frac{1}{5} (1 + ,845 + ,4771 + ,6990 + ,7782)$$

$$= \frac{1}{5} (3,7994) = ,7599$$

حيث لو ترمز إلى اللوغاريتم للأساس ١٠ .

ومن الأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن :

$$d = 5,753$$

يلاحظ أيضاً أن  $\bar{m}$  لهذه المجموعة هو ٢,٦ أي أن :

الوسط الحسابي < الوسط الهندسي .

ب - حساب الوسط الهندسي من البيانات المبوبة :

لحساب الوسط الهندسي من الجداول التكرارية نبدأ بإيجاد مراكز

الفئات (م) ونستخدم العلاقة التالية :

$$(4-8) \quad \boxed{\begin{array}{c} \text{مجد ك} \\ \text{ك}^1 \text{ م}^1 \times \text{ك}^2 \text{ م}^2 \times \dots \times \text{ك}^n \text{ م}^n \\ \hline = d \end{array}}$$

حيث (ك) ترمز إلى التكرارات ، (م) ترمز إلى مركز الفئة .

وباستخدام اللوغاريتمات .

$$\therefore \text{لود} = \frac{\text{مجد (ك لوس)}}{\text{مجد ك}}$$

مثال ( ٤ - ١٨ ) :

احسب الوسط الهندسي للتوزيع التكراري في مثال ( ٤ - ١٤ )

الحل :

جدول ( ٤ - ٦ )

حساب الوسط الهندسي

فئات	ك	س	لوس	ك لوس
١٠ -	٨	١٥	١,١٧٦١	٩,٤٠٨٨
٢٠ -	١٢	٢٥	١,٣٩٧٩	١٦,٧٧٤٨
٣٠ -	٢٠	٣٥	١,٥٤٤١	٣٠,٨٨٢٠
٤٠ -	٢٥	٤٥	١,٦٥٣٢	٤١,٣٠٠
٥٠ -	١٥	٥٥	١,٧٤٠٤	٢٦,١٠٦٠
٦٠ -	١٣	٦٥	١,٨١٢٩	٢٣,٥٦٧٧
٧٠ - ٨٠	٧	٧٥	١,٨٧٥١	١٣,١٢٥٤
	١٠٠			١٦١,١٩٤٧

$$\text{لود} = \frac{\text{مجم (ك لوس)}}{\text{مجم ك}} = \frac{١٦١,١٩٤٧}{١٠٠}$$

$$= ١,٦١١٩ \text{ ومن الأعداد المقابلة للوغاريتمات}$$

$$\therefore د = ٤٠,٩٢$$

يلاحظ أنه لا يمكن استخدام الوسط الهندسي كمقياس للنزعة المركزية إذا كانت إحدى القيم صفراً أو سالبة كما يرى البعض صعوبة حسابه نظراً لاعتماده على اللوغاريتمات إلا أنه أكثر المقاييس ملائمة في حساب الأرقام القياسية ومعدلات النمو كما أنه أكثر اعتدالاً من الوسط الحسابي لأنه لا يتأثر بالقيم الشاذة نفس تأثر الوسط الحسابي بها

### خامساً : الوسط التوافقي Harmonic Mean

الوسط التوافقي لمجموعة من القيم هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم ويفضل استخدام الوسط التوافقي في قياس الظواهر التي تقاس بالنسبة لوحدة ثابتة كوحدة الزمن مثل حساب معدل السرعة أو حساب معدل التغير في عدد الوحدات المنتجة يومياً بإحدى المصانع .

أ - حساب الوسط التوافقي من البيانات غير المبوبة :

إذا كان لدينا عدد (ن) من القيم هي على الترتيب :

$$س_١, س_٢, \dots, س_n$$

فإنه باستخدام التعريف السابق يمكن حساب الوسط التوافقي وسنرمز له بالرمز (ت) بالعلاقة التالية :

$$ت = \frac{ن}{\frac{1}{س_١} + \dots + \frac{1}{س_٢} + \frac{1}{س_n}}$$

(٩ - ٤)

$$\boxed{ت = \frac{ن}{\text{مجم} \left( \frac{1}{س} \right)}}$$

مثال (٤ - ١٩) :

احسب الوسط التوافقي للأعداد :

١٠ ، ٥ ، ٤ ، ٨ ، ٢

$$ت = \frac{ن}{\text{مجم} \left( \frac{1}{س} \right)} = \frac{٥}{\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}}$$

$$٤,٢٦ = \frac{٥}{1,١٧٥} = \frac{٥}{,١ + ,٢ + ,٢٥ + ,١٢٥ + ,٥} =$$

وبحساب الوسط الحسابي والوسط الهندسي لهذه المجموعة نجد

أن :

$$س = ٥,٠٢ = ٥,٥,٨$$

ومن ثم نلاحظ أن

الوسط الحسابي < الوسط الهندسي < الوسط التوافقي .

ب - حساب الوسط التوافقي من البيانات المبوية :

لحساب الوسط التوافقي من الجدول التكراري نستخدم العلاقة

التالية :

(٤ - ١٠)

$$ت = \frac{\text{مجم ك}}{\text{مجم} \left( \frac{ك}{س} \right)}$$

حيث ك التكرارات

س مراكز الفئات



مثال ( ٤ - ٢٠ ) :

احسب الوسط التوافقي للتوزيع التكراري في مثال ( ٤ - ١٤ ) .

الحل :

جدول ( ٤ - ٧ )

حساب الوسط التوافقي

فئات	ك	س	$\frac{1}{\frac{س}{ك}}$	$\frac{ك}{\frac{س}{ك}}$
١٠ -	٨	١٥	,٠٦٦٧	,٥٣٣٣
٢٠ -	١٢	٢٥	,٠٤	,٤٨٠٠
٣٠ -	٢٠	٣٥	,٠٢٨٦	,٥٧١٤
٤٠ -	٢٥	٤٥	,٠٢٢٢	,٥٥٥٦
٥٠ -	١٥	٥٥	,٠١٨٢	,٢٧٢٧
٦٠ -	١٣	٦٥	,٠١٥٤	,٢٠٠٠
٧٠ - ٨٠	٧	٧٥	,٠١٣٣	,٠٩٣٣
المجموع	١٠٠			٢,٧٠٦٣

$$ن = \frac{\text{مجم ك}}{\text{مجم } \left( \frac{س}{ك} \right)}$$

$$٣٦,٩٥ = \frac{١٠٠}{٢,٧٠٦٣} =$$

## ملاحظات عامة

١ - العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال :

أ - إذا كان التوزيع متماثلاً Symmetric فإن  
الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال .

والتوزيع التكراري التالي يعطي فكرة عن التوزيعات  
المتماثلة :

فئات	-٥	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	٣٥-٤٠
تكرار	٢	٤	٦	١٠	٦	٤	٢

ويستطيع القارئ بسهولة أن يثبت أن :

الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال = ٢٢,٥

ب - إذا كان التوزيع غير متماثل أو ملتوي .

- إذا كان التوزيع ملتوياً ناحية اليمين فيلاحظ أن :

الوسط الحسابي < الوسيط < المنوال .

- إذا كان التوزيع ملتوياً ناحية اليسار فيلاحظ أن :

الوسط الحسابي > الوسيط > المنوال .

ويمكن استخدام هذه العلاقة في دراسة درجة التواء التوزيع فإذا كان :

(الوسط الحسابي - المنوال) = صفر يكون التوزيع متماثل .

أو (الوسط الحسابي - الوسيط) < صفر يكون التوزيع ملتوياً ناحية اليمين .

> صفر يكون التوزيع ملتوياً ناحية اليسار .

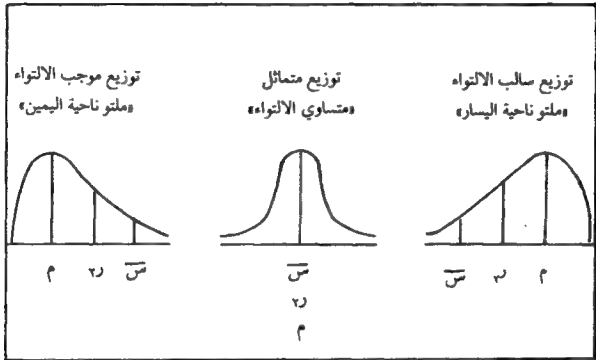
كذلك يمكن حساب أي من المقاييس الثلاثة بدلالة المقياسين الآخرين باستخدام العلاقة :

$$\text{المنوال} = ٣ \times \text{الوسيط} - ٢ \times \text{الوسط الحسابي} .$$

وهذه العلاقة تمكنتنا من حساب الوسط الحسابي وخاصة في حالة الجداول التكرارية المفتوحة حيث يصعب حسابه مباشرة بعد حساب كل من الوسيط والمنوال .

وشكل ( ٤ - ٣ ) يوضح العلاقة بين كل من الوسط الحسابي (  $\bar{M}$  ) والوسيط (  $r$  ) والمنوال (  $M$  ) في حالة التوزيعات التكرارية المتماثلة والملتوية .

شكل ( ٤ - ٣ )  
العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط والمنوال



٢ - العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي والوسط التوافقي :  
يستطيع القارئ أن يلاحظ بسهولة من خلال حلول الأمثلة السابقة  
صحة العلاقة التالية :

$$\text{الوسط الحسابي} < \text{الوسط الهندسي} < \text{الوسط التوافقي}$$

## تمارين الفصل الرابع

(١) من الجدول التكراري التالي :

فئات	-١٤	-١٦	-١٨	-٢٠	-٢٢	٢٤-٢٦
تكرار	١٣	٢٥	٣٠	٤٠	٢٤	١٥

أ - ارسم المدرج التكراري واشتق منه المنوال وحقق الناتج بالحساب .

ب - ارسم منحني التكرار المتجمع الصاعد واشتق منه الوسيط وحقق الناتج حسابياً .

جـ - احسب الوسيط الحسابي .

(٢) احسب الوسيط الحسابي للتوزيع التكراري :

فئات	-٥	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	٣٥-٤٠
تكرار	٩	٢١	٣٢	٤٥	٢٥	١١	٤

(٣) التوزيع التكراري التالي يوضح توزيع ٩٠٠ مشتغل بحسب دخولهم الشهرية :

فئات الدخل	-٢٥	-٣٥	-٤٥	-٥٥	-٦٥	-٧٥	-٨٥	٩٥-١٠٥
عدد المشتغلين	٦٨	٨٩	١٢١	١٥٢	١٩٧	١٣٦	٨٠	٥٧

والمطلوب :

- أ - حساب الوسط الحسابي .  
ب - ارسم المدرج التكراري واشتق منه المنوال .  
ج - احسب الوسط التوافقي والهندسي .  
د - ارسم المنحنى التكراري والمضلع التكراري .

(٤) احسب الوسط الحسابي والهندسي والتوافقي للقيم التالية :

١١ ، ١٣ ، ٩ ، ١٧ ، ٢٥ ، ٢١ ، ١٥

(٥) احسب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل من المجموعات التالية :

أ - ٨ ، ٧ ، ٥ ، ٢ ، ١ ، ٣ ، ٢  
ب - ٦ ، ١٣ ، ١٥ ، ١١ ، ٧ ، ٩  
ج - ٤٠ ، ٤٥ ، ٣٧ ، ٤٢ ، ٣٧

(٦) من الجدول التكراري التالي :

٥٥ - ٤٥	-٤٠	-٣٥	-٢٥	-١٥	-١٠	فئات
٢٠	٥٠	١٠٠	٤٥٠	٣٠٠	١٢٥	تكرار

والمطلوب :

- أ - ارسم المدرج التكراري واشتق منه المنوال .  
ب - احسب الوسط الحسابي .

(٧) من التوزيع التكراري :

فئات	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	٨٠ فأكثر
تكرار	٢٢	٣٧	٥٠	٦٢	٤٣	٣٥	١١

والمطلوب :

- كون جدول التكرار المتجمع الصاعد واشتق منه الوسيط .
  - احسب المنوال بطريقة الرافعة .
  - قدر قيمة الوسط الحسابي .
- (٨) كان الانفاق الشهري بالدينار لعينة مكونة من ٤٠٠ أسرة موزعاً كما يلي :

فئات الانفاق	-٣٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	١٠٠ فأكثر
عدد الاسر	٤٠	٣٠	٤٠	١٠٠	١٢٠	٧٠

والمطلوب تقدير قيمة الوسط الحسابي للاتفاق .





## الفصل الخامس

### مقاييس التشتت والالتواء

### Measures of Dispersion

#### مقدمة :

المتوسطات كمجموعة من مقاييس النزعة المركزية قد لا تعطي فكرة صحيحة عن طبيعة الظاهرة محل الدراسة وبصفة خاصة عن اجراء المقارنة بين مجموعتين من القيم فقد يتساوى متوسط المجموعتين في نفس الوقت الذي يوجد فيه اختلاف كبير بين مفردات كل منهما مما يعطي نتائج مضللة لو اكتفينا بالمتوسط فقط .

ولتوضيح ذلك نفترض أن لدينا مجموعتين من القيم :

المجموعة الأولى : ٨ ، ٩ ، ١١ ، ١٢

المجموعة الثانية : ١ ، ٧ ، ١٠ ، ٢٢

والوسط الحسابي في كل من المجموعتين يساوي ١٠ فلو اعتمدنا على الوسط وحده في تكوين فكرة عن كل من المجموعتين لتوصلنا إلى فكرة غير صحيحة وهي أن المجموعتين متشابهتين وهذا على عكس الواقع لأن قيم المجموعة الأولى متقاربة من بعضها البعض على عكس القيم في المجموعة الثانية لأن المدى في المجموعة الأولى يساوي ١٢ - ٨ = ٤ بينما المدى في المجموعة الثانية يساوي ٢٢ - ١ = ٢١ أي أن القيم في المجموعة الثانية أكثر تشتتاً من القيم في المجموعة الأولى .

وباختصار فإنه لتكوين فكرة صادقة عن مجموعة من القيم يلزم معرفة قيمة تشتتها بجانب معرفة متوسطها . والتشتت لفظ يعني التباعد أو التفاوت بين مفردات مجموعة من القيم وأهم مقاييس التشتت هي :

(١) المدى .

(٢) نصف المدى الربيعي .

(٣) الانحراف المتوسط .

(٤) الانحراف المعياري .

### أولاً : المدى Range

المدى هو أبسط مقاييس التشتت وهو عبارة عن الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة من بين مفردات مجموعة من القيم أي أن :

$$\text{المدى} = \text{الحد الأعلى للقيم} - \text{الحد الأدنى للقيم}$$

وبالرغم من سهولة حساب المدى إلا أنه أقل مقاييس التشتت استخداماً نظراً لأنه يعتمد في حسابه على مشاهدين فقط من مشاهدات العينة ويعطي نتائج مضللة عند وجود قيم شاذة أو متطرفة كذلك لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة مما يستلزم الرجوع للقيم الأصلية . ومن عيوب المدى أنه لا يصلح للمقارنة بين تشتت مجموعتين من القيم مختلفة في وحدات القياس .

## ثانياً : نصف المدى الربيعي Semi - Interquartile Range

يستخدم نصف المدى الربيعي كمقياس للتشتت لعلاج النقص الناشئ عن تأثير المدى بالقيم المتطرفة فضلاً على أنه المقياس الوحيد لقياس التشتت في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة .

ونصف المدى الربيعي هو نصف الفرق بين الربيع الأعلى والربيع الأدنى .

∴ نصف المدى الربيعي  $= \frac{1}{4} ( \text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى} )$  .

فإذا رمزنا للربيع الأعلى أو الثالث بالرمز ( ٣ ) ورمزنا للربيع الأدنى أو الأول بالرمز ( ١ ) فإن :

( ١ - ٥ )

نصف المدى الربيعي  $= \frac{1}{4} ( ٣ - ١ )$

حيث أن :

الربيع الأدنى : هو القيمة التي يسبقها  $\frac{1}{4}$  التكرارات وتلونها  $\frac{3}{4}$  التكرارات .

$$\text{أي أن : ترتيب } ١ = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{\text{مجموع}}{4}$$

الربيع الأعلى : هو القيمة التي يسبقها  $\frac{3}{4}$  التكرارات وتلونها  $\frac{1}{4}$  التكرارات أي أن :

$$\frac{3 \times \text{مجدك}}{4} = \frac{3 \times \text{مجموع التكرارات}}{4} = \text{ترتيب ر3}$$

ويمكننا حساب نصف المدى الربيعي من التوزيعات التكرارية باستخدام طريقتي الرسم والحساب كما سبق في حساب الوسيط كما يتضح في حل المثال التالي :

مثال ( ٥ - ١ ) :

احسب نصف المدى الربيعي للجدول التكراري الذي يوضح التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى الشركات في مثال ( ٤ - ٥ ) .

الحل : ١ - طريقة الحساب :

نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد

حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد
أقل من ٢٠	صفر
أقل من ٢٥	١٦
أقل من ٣٠	٣٧
أقل من ٣٥	٧٤
أقل من ٤٠	١٢٥
أقل من ٤٥	١٦٧
أقل من ٥٠	١٩١
أقل من ٥٥	٢٠٠

— لحساب قيمة الربيع الأدنى :

$$٥٠ = \frac{٢٠٠}{٥} = \text{ترتيب } ١٠$$

ومن الجدول التكراري الصاعد نجد أن الفئة التي يقع فيها الربيع

الأدنى هي ٣٠ — ٣٥ وباستخدام التناسب على النحو التالي :

٣٧	٣٠	$\frac{٣٧ - ٥٠}{٣٧ - ٧٤} = \frac{٣٠ - ١٠}{٣٠ - ٣٥}$
٥٠	١٠	$\frac{١٣}{٣٧} = \frac{٣٠ - ١٠}{٥}$
٧٤	٣٥	$\frac{٦٥}{٣٧} + ٣٠ = ١٠ \therefore$
		$٣١,٧٦ = ١٠ \therefore$

— لحساب قيمة الربيع الأعلى :

$$١٥٠ = \frac{٢٠٠ \times ٣}{٤} = \text{ترتيب } ٣٠$$

$\therefore$  فئة الربيع الأعلى هي ٤٠ — ٤٥

١٢٥	٤٠	$\frac{١٢٥ - ١٥٠}{١٢٥ - ١٦٧} = \frac{٤٠ - ٣٠}{٤٠ - ٤٥}$
١٥٠	٣٠	$\frac{٢٥}{٤٢} = \frac{٤٠ - ٣٠}{٥}$
١٦٧	٤٥	$\frac{١٢٥}{٤٢} + ٤٠ = ٣٠$

$$٤٢,٩٨ = ٣٠ \therefore$$

∴ نصف المدى الربيعي  $= \frac{1}{4} (١٠ - ٣) =$

$$٥,٦١ = \frac{١١,٢٢}{٢} = (٣١,٧٦ - ٤٢,٩٨) \frac{1}{٢} =$$

٢ - طريقة الرسم :

باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد لهذا التوزيع في شكل  
(٤ - ١) نجد أن :

$$١ = ٣١,٨ \text{ تقريباً}$$

$$٣ = ٤٣ \text{ تقريباً}$$

$$\therefore \text{نصف المدى الربيعي} = \frac{1}{٢} (٣١,٨ - ٤٣) = \frac{١١,٢}{٢} = ٥,٦$$

ملاحظات : -

(١) إذا استخدمنا التوزيع التكراري المتجمع الهابط فإننا لإيجاد نصف  
المدى الربيعي نستخدم العلاقة التالية :

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{1}{4} (\text{الربيع الأدنى} - \text{الربيع الأعلى})$$

(٢) يمكن استخدام الربيع الأدنى والربيع الأعلى مع الوسيط للتعرف على  
درجة تماثل أو التواء التوزيع باستخدام العلاقات التالية :

إذا كان :

$$\bullet \text{ الربيع الأعلى} - \text{الوسيط} = \text{الوسيط} - \text{الربيع الأدنى}$$

يكون التوزيع متماثل

$$\bullet \text{ الربيع الأعلى} - \text{الوسيط} < \text{الوسيط} - \text{الربيع الأدنى}$$

يكون التوزيع ملتوياً ناحية اليمين

$$\bullet \text{ الربيع الأعلى} - \text{الوسيط} > \text{الوسيط} - \text{الربيع الأدنى}$$

يكون التوزيع ملتوياً ناحية اليسار

### ثالثاً : الانحراف المتوسط Mean Deviation

الانحراف المتوسط هو متوسط الانحرافات المطلقة لمجموعة من القيم عن وسطها الحسابي وهو أحد مقاييس التشتت ويعطي مؤشراً على مدى تباعد أو تقارب مجموعة من القيم عن وسطها الحسابي . أما متوسط الانحرافات فهو غير صالح كمقياس للتشتت حيث يساوي صفراً دائماً لأن المجموع الجبري لانحرافات مجموعة من القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً .

حساب الانحراف المتوسط من البيانات غير المبوبة :

$$(٢-٥) \quad \boxed{\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\sum |س - \bar{س}|}{ن}}$$

$$= \frac{\sum |ح|}{ن}$$

مثال (٢-٥) :

احسب الانحراف المتوسط للقيم :

٩ ، ٨ ، ٧ ، ٦ ، ٥

الحل :

$$٧ = \frac{٣٥}{٥} = \text{الوسط الحسابي } (\bar{س})$$

س	س - س
٥	٢
٦	١
٧	صفر
٨	١
٩	٢
٣٥	٦

$$\begin{aligned} \frac{\text{مجمد |س - س|}}{ن} &= \text{الانحراف المتوسط} \\ \frac{٦}{٥} &= \\ ١,٢ &= \end{aligned}$$

حساب الانحراف المتوسط من البيانات المبوبة :

لحساب الانحراف المتوسط من الجداول التكرارية تتبع الخطوات التالية :

- نحسب الوسط الحسابي للتوزيع التكراري .
- نحسب الانحرافات المطلقة بين مركز كل فئة والوسط الحسابي أي  $|س - س|$
- نضرب الانحرافات المطلقة لكل فئة  $\times$  التكرار المناظر لكل فئة ونحصل على  $|س - س|$  مجدك
- ونحصل على الانحراف المتوسط من العلاقة التالية :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجدك |س - س|}}{\text{مجدك}} \quad (٣-٥)$$

$$= \frac{\text{مجدك |ح|}}{\text{مجدك}}$$



مثال (٥ - ٣) :

احسب الانحراف المتوسط للتوزيع التكراري في مثال (٤ - ٥) .

الحل :

جدول (٥ - ١)  
حساب الانحراف المتوسط

فئات	تكرار ك	س	س - س̄	ك   س - س̄
٢٠ -	١٦	٢٢,٥	١٤,٧٥	٢٣٦
٢٥ -	٢١	٢٧,٥	٩,٧٥	١٠٤,٧٥
٣٠ -	٣٧	٣٢,٥	٤,٧٥	١٧٥,٧٥
٣٥ -	٥١	٣٧,٥	,٢٥	١٢,٧٥
٤٠ -	٤٢	٤٢,٥	٥,٢٥	٢٢٠,٥٠
٤٥ -	٢٤	٤٧,٥	١٠,٢٥	٢٤٦
٥٠ - ٥٥	٩	٥٢,٥	١٥,٢٥	١٣٧,٢٥
المجموع	٢٠٠			١٢٣٣,٠٠

سبق حساب الوسط الحسابي  $(\bar{س}) = ٣٧,٢٥$

$$\frac{\text{مجم ك | س - س̄ |}}{\text{مجم ك}} = \text{الانحراف المتوسط}$$

$$٦,١٦٥ = \frac{١٢٣٣}{٢٠٠} =$$

## ملاحظات :

١ - يتضح صعوبة حساب الانحراف المتوسط نظراً لما يشتمله من كسور  
نتيجة حساب الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي .

٢ - يأخذ الانحراف المتوسط في اعتباره جميع القيم في المجموعة وهذا  
ما يميزه عن المدى ونصف المدى الربيعي إلا أنه لا يستخدم على  
نطاق واسع لصعوبة عملياته الحسابية وعدم شيوع استخدامه في  
التطبيقات المختلفة .

٣ - هناك طريقة أخرى لحساب هذا المقياس وذلك بحساب الانحرافات  
المطلقة عن الوسيط وبالرغم من ذلك فإن حساب الانحرافات المطلقة  
عن الوسط الحسابي هي الأكثر استخداماً في حساب الانحراف  
المتوسط .

## رابعاً : الانحراف المعياري Standard Deviation

يعتبر الانحراف المعياري من أكثر مقاييس التشتت شيوعاً واستخداماً ويعتمد هذا المقياس على طريقة أخرى لتلافي تلاشي مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي (أهملنا الإشارة في حالة الانحراف المتوسط) وذلك بتربيع الانحرافات عن الوسط الحسابي وحساب متوسط مربعات هذه الانحرافات نحصل على ما يسمى بالتباين Variance ويرمز له بالرمز  $(\sigma^2)$  أي أن :

التباين  $(\sigma^2)$  هو متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي فإذا كان لدينا (ن) من القيم هي  $s_1, s_2, \dots, s_n$  وسطها الحسابي  $(\bar{s})$  فإن :

$$\sigma^2 = \frac{\text{مجم} (s - \bar{s})^2}{n}$$

والانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي ويرمز له بالرمز  $(\sigma)$  أي أن :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجم} (s - \bar{s})^2}{n}}$$

## خصائص الانحراف المعياري :

هناك مجموعة من الخصائص للانحراف المعياري تساعدنا على تبسيط القوانين المستخدمة في حسابه أهمها الخاصيتان التاليتان :

١ - الانحراف المعياري لا يتأثر بطرح أو جمع مقادير ثابتة من مفردات القيم الداخلة في حسابه . ولإثبات ذلك نفترض أن لدينا القيم :

$$\bar{x} = \frac{\text{مجم } x}{n} \text{ وانحرافها المعياري } = \sqrt{\frac{\text{مجم } (x - \bar{x})^2}{n}} = \sigma$$

نفترض أننا طرحنا المقدار الثابت (أ) من جميع المفردات السابقة لتصبح  $x_1 - أ ، x_2 - أ ، \dots ، x_n - أ$  لها الوسط الحسابي

$$\bar{x}_1 = \frac{\text{مجم } (x - أ)}{n} = \bar{x} - أ$$

وذلك باستخدام خصائص المجموع في الفصل الأول ، ويكون انحرافها المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجم } (x - أ - \bar{x} + \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\text{مجم } (x - \bar{x})^2}{n}} = \sigma$$

يلاحظ مما سبق أن الانحراف المعياري لم يتأثر بالطرح على عكس الوسط الحسابي .

٢ - الانحراف المعياري يتأثر بقسمة مفردات القيم الداخلة في حسابه على مقدار ثابت وكذلك الحال بالنسبة للضرب .

حساب الانحراف المعياري من البيانات غير المبوية :

(١) الطريقة المباشرة : باستخدام التعريف السابق فإن :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجد}(\text{س} - \overline{\text{س}})^2}{\text{ن}}}$$

يلاحظ أنه يلزم حساب الوسط الحسابي للمجموعة أولاً قبل حساب الانحراف المعياري ويمكننا التغلب على ذلك إذا لاحظنا أن :

$$\begin{aligned} \text{مجد}(\text{س} - \overline{\text{س}})^2 &= \text{مجد}(\text{س}^2 - 2\text{س}\overline{\text{س}} + \overline{\text{س}}^2) \\ &= \text{مجد}\text{س}^2 - 2\overline{\text{س}}\text{مجد}\text{س} + \overline{\text{س}}^2\text{ن} \\ &= \text{مجد}\text{س}^2 - 2\overline{\text{س}}\frac{\text{مجد}(\text{س})}{\text{ن}} + \frac{\overline{\text{س}}^2(\text{مجد}\text{س})}{\text{ن}} \\ &= \text{مجد}\text{س}^2 - \frac{\overline{\text{س}}(\text{مجد}\text{س})}{\text{ن}} \end{aligned}$$

ومن ثم نؤول الصورة السابقة إلى :

$$\sigma = \sqrt{\text{مجد}\text{س}^2 - \frac{\overline{\text{س}}(\text{مجد}\text{س})}{\text{ن}}} \quad (٤ - ٥)$$

(٢) طريقة الانحرافات أو الفروق البسيطة :

إذا استخدمنا وسطاً فرضياً (أ) وحصلنا على الانحرافات البسيطة (ح = س - أ) نستخدم الصورة التالية :

$$(٥ - ٥) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجم ح}^2}{ن} - \left( \frac{\text{مجم ح}}{ن} \right)^2}$$

(٣) طريقة الانحرافات أو الفروق المختصرة :

إذا قبلت الانحرافات البسيطة القسمة على مقدار ثابت (ث) فنحصل على الانحرافات المختصرة (ح =  $\frac{1}{\text{ث}}$ ) وباستخدام الخصائص السابقة نجد أن الانحراف المعياري يتأثر بالمقدار الثابت . ولإثبات ذلك نفترض أن لدينا القيم : س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، ... ، س<sub>ن</sub> وسطها الحسابي  $\bar{س}$  وانحرافها المعياري (ع)

ونفترض أننا قسمنا جميع قيم المجموعة على مقدار ثابت (أ) لتصبح على النحو التالي :

$$\frac{س_١}{أ} ، \frac{س_٢}{أ} ، \dots ، \frac{س_ن}{أ} \text{ وباستخدام خصائص المجموع}$$

يصبح وسطها الحسابي :

$$\frac{\bar{س}}{أ} = \frac{\text{مجم أ}}{ن} \div \frac{\text{مجم س}}{ن} = \frac{\text{مجم س}}{ن}$$

والانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجم} \left( \frac{س}{أ} - \frac{\bar{س}}{أ} \right)^2}{ن}} = \sqrt{\frac{\text{مجم} \left( \frac{س}{أ} - \frac{\bar{س}}{أ} \right)^2}{ن}}$$

$$\frac{ع}{1} = \frac{\sqrt{\text{مجم} (س - س) - 2}}{ن} \sqrt{\frac{1}{1}} =$$

يلاحظ أن الانحراف المعياري للقيم بعد القسمة يكافئ الانحراف المعياري لها قبل عملية القسمة مقسوماً على المقدار الثابت .

ومن العلاقة السابقة فإن :

$$ع = ع^1$$

ويعني ذلك أنه يمكننا تبسيط العمليات الحسابية إذا وجد مقدار ثابت تقبل القسمة عليه جميع قيم المجموعة ويكون الانحراف المعياري للقيم الأصلية مساوياً للانحراف المعياري للقيم المختصرة مضروباً في المقدار الثابت . ولهذا إذا استخدمنا فكرة الانحرافات المختصرة (ح' =  $\frac{ع}{ن}$ ) فإننا نستخدم الصورة التالية لحساب الانحراف المعياري :

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجم}^2}{ن} - \left( \frac{\text{مجم}^1}{ن} \right)^2} \quad (5-6)$$

مثال ( 5 - 4 ) : احسب الانحراف المعياري للقيم التالية :

٩ ، ٨ ، ٧ ، ٦ ، ٥

الحل :

باستخدام الطريقة المباشرة

$$\sqrt{\frac{\sum (\frac{مجمس}{ن})^2}{ن} - \frac{مجمس^2}{ن^2}} = ع$$

$$\sqrt{\frac{\sum (\frac{٣٥}{٥})^2}{٥} - \frac{٢٥٥}{٥^2}} =$$

$$\sqrt{٢} = \sqrt{٤٩ - ٥١} =$$

س	س <sup>٢</sup>
٥	٢٥
٦	٣٦
٧	٢٩
٨	٦٤
٩	٨١
٣٥	٢٥٥

∴ الانحراف المعياري = ١,٤١٤

مثال (٥ - ٥) :

احسب الانحراف المعياري والتباين للقيم التالية :

٦٧٥ ، ٦٧٠ ، ٦٦٥ ، ٦٦٠ ، ٦٥٥

الحل :

يتضح أن هذه القيم كبيرة ويمكن استخدام طريقة الانحرافات البسيطة

باختيار وسط فرضي وليكن  $أ = ٦٦٠$

س	ح = س - ٦٦٠	ح <sup>٢</sup>
٦٥٥	- ٥	٢٥
٦٦٠	صفر	صفر
٦٦٥	٥	٢٥
٦٧٠	١٠	١٠٠
٦٧٥	١٥	٢٢٥
	٢٥	٣٧٥



$$\sqrt{\frac{\text{مجم}^2}{\text{ن}}} - \frac{\text{مجم}^2}{\text{ن}} = \text{ع.} \therefore$$

$$\sqrt{25 - 75} = \sqrt{\frac{25}{5} - \frac{375}{5}} =$$

$$1,414 \times 5 = \sqrt{2} \quad 5 = \sqrt{50} =$$

∴ الانحراف المعياري = ٧,٠٧٠ والتباين = ٥٠

حل آخر :

يلاحظ أن الانحرافات البسيطة تقبل القسمة على المقدار الثابت ٥ ويمكننا استخدام طريقة الانحرافات المختصرة كما يلي :

س	ح	$\frac{ح}{5} = \frac{1}{5} ح$	$\frac{1}{5} ح$
٦٦٥	٥ -	١ -	١
٦٦٠	صفر	صفر	صفر
٦٦٥	٥	١	١
٦٧٠	١٠	٢	٤
٦٧٥	١٥	٣	٩
		٥	١٥

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجح}^2}{\text{ن}} - \frac{\text{مجح}^2}{\text{ن}}} \quad \text{ع} = \sqrt{\frac{10}{5} - \frac{5}{5}} = \sqrt{1-3} = 0.7, 0.7$$

وهي نفس النتيجة السابقة

حساب الانحراف المعياري من البيانات المبوبة :

باستخدام خواص الانحراف المعياري وكما سبق في حالة البيانات غير المبوبة يمكن اثبات أن هناك طرقاً ثلاثاً لحساب الانحراف المعياري من الجداول التكرارية على النحو التالي :

(١) الطريقة المباشرة :

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجس ك}^2}{\text{مجك}} - \frac{\text{مجس ك}^2}{\text{مجك}}} \quad (7-5)$$

(٢) باستخدام الانحرافات أو الفروق البسيطة :

إذا استخدمنا وسطاً فرضياً مناسباً وحسبنا الانحرافات البسيطة مع تطبيق الخصائص السابقة فيمكن حساب الانحرافات المعياري بالعلاقة التالية :

$$(٨ - ٥) \quad \boxed{\sqrt{\frac{\text{مجح ك}^2}{\text{مجك}} - \frac{\text{مجح ك}}{2}} = \epsilon}$$

(٣) باستخدام الانحرافات أو الفروق المختصرة :

إذا كانت الانحرافات البسيطة تقبل القسمة على مقدار ثابت (ث)  
نحسب الانحرافات المختصرة ونستخدم العلاقة :

$$(٩ - ٥) \quad \boxed{\sqrt{\frac{\text{مجح ك}^2}{\text{مجك}} - \frac{\text{مجح ك}}{2}} = \epsilon \text{ ث}}$$

مثال (٥ - ٦) :

احسب الانحراف المعياري من الجدول التكراري الذي يوضح التوزيع  
العمرى لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى الشركات في مثال  
(٤ - ٥) .

الحل :

يمكن حساب الانحراف المعياري بإحدى الطرق الآتية :

(١) الطريقة المباشرة :

جدول ( ٥ - ٢ )

حساب الانحراف المعياري بالطريقة المباشرة

فئات	تكرار ك	مراكز الفئات س	س ك	س <sup>٢</sup> ك
- ٢٠	١٦	٢٢,٥	٣٦٠	٨١٠٠,٠٠
- ٢٥	٢١	٢٧,٥	٥٧٧,٥	١٥٨٨١,٢٥
- ٣٠	٣٧	٣٢,٥	١٢٠٢,٥	٣٩٠٨١,٢٥
- ٣٥	٥١	٣٧,٥	١٩١٢,٥	٧١٧١٨,٧٥
- ٤٠	٤٢	٤٢,٥	١٧٨٥	٧٥٨٦٢,٥٠
- ٤٥	٢٤	٤٧,٥	١١٤٠	٥٤١٥٠
٥٥ - ٥٠	٩	٥٢,٥	٤٧٢,٥	٢٤٨٠٦,٢٥
المجموع	٢٠٠		٧٤٥٠	٢٨٩٦٠٠

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجم س ك}}{\text{مجم ك}} - \left( \frac{\text{مجم س ك}^2}{\text{مجم ك}^2} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٨٩٦٠٠}{٢٠٠} - \left( \frac{٧٤٥٠^2}{٢٠٠^2} \right)}$$

$$= \sqrt{٦٠,٤٣٧٥} = ٧,٧٧$$

(٢) طريقة الانحرافات البسيطة :

باختيار وسط فرضي ٣٧,٥ نحصل على الجدول التالي :

### جدول ( ٥ - ٣ )

حساب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات البسيطة

فئات	ك	س	ح = س - ٣٧,٥	ح ك	ح <sup>٢</sup> ك
- ٢٠	١٦	٢٢,٥	- ١٥	- ٢٤٠	٣٦٠٠
- ٢٥	٢١	٢٧,٥	- ١٠	- ٢١٠	٢١٠٠
- ٣٠	٣٧	٣٢,٥	- ٥	- ١٨٥	٩٢٥
- ٣٥	٥١	٣٧,٥	صفر	صفر	صفر
- ٤٠	٤٢	٤٢,٥	٥	٢١٠	١٠٥٠
- ٤٥	٢٤	٤٧,٥	١٠	٢٤٠	٢٤٠٠
٥٥ - ٥٠	٩	٥٢,٥	١٥	١٣٥	٢٠٢٥
المجموع	٢٠٠			- ٥٠	١٢١٠٠

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجم ك}^2}{\text{مجم ك}} - \left( \frac{\text{مجم ح ك}}{\text{مجم ك}} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{١٢١٠٠}{٢٠٠} - \left( \frac{- ٥٠}{٢٠٠} \right)^2}$$

$$= \sqrt{٦٠,٥ - ٠,١٢٥} = \sqrt{٦٠,٤٣٧٥} = ٧,٧٧$$

٣ - طريقة الانحرافات المختصرة :

يلاحظ أن الانحرافات البسيطة تقبل القسمة على المقدار ٥ الذي يناظر طول الفئة ونحصل على الانحرافات المختصرة كما يتضح في الجدول التالي :

جدول ( ٥ - ٤ )

حساب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة

فئات	ك	س	ح = س - أ	ح' = ح / ٥	ح' ك	ح' ٢ ك
- ٢٠	١٦	٢٢,٥	- ١٥	- ٣	- ٤٨	١٤٤
- ٢٥	٢١	٢٧,٥	- ١٠	- ٢	- ٤٢	٨٤
- ٣٠	٣٧	٣٢,٥	- ٥	- ١	- ٣٧	٣٧
- ٣٥	٥١	٣٧,٥	صفر	صفر	صفر	صفر
- ٤٠	٤٢	٤٢,٥	٥	١	٤٢	٤٢
- ٤٥	٢٤	٤٧,٥	١٠	٢	٤٨	٩٦
٥٥ - ٥٠	٩	٥٢,٥	١٥	٣	٢٧	٨١
المجموع	٢٠٠				١٠ -	٤٨٤

$$ع = ث \quad \sqrt{\frac{\text{مجموع ح' ك}}{\text{مجموع ح}} - \left( \frac{\text{مجموع ح' ك}}{\text{مجموع ح}} \right)^2}$$

$$٥ = \quad \sqrt{\frac{٤٨٤}{٢٠٠} - \left( \frac{١٠ -}{٢٠٠} \right)^2}$$

$$٥ = \quad \sqrt{٢,٤٢ - ٠,٠٢٥}$$

$$٥ = \quad \sqrt{٢,٤١٧٥}$$

$$٧,٧٧ = ١,٥٥٤٨ \times ٥ =$$

## ملاحظات :

- (١) حصلنا على نفس النتيجة باستخدام الطرق الثلاث وعملياً تفضل الطريقة الأخيرة وخاصة في حالة التوزيعات التكرارية المنتظمة حيث يلاحظ سهولة العمليات الجبرية .
- (٢) يمكن اتباع نفس الطرق السابقة في حالة التوزيعات التكرارية غير المنتظمة .
- (٣) يلاحظ من جداول حساب الانحراف المعياري أنها لا تختلف عن جداول حساب الوسط الحسابي إلا بإضافة العمود الأخير وعليه نستخدم جدولاً واحداً لحساب كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري .

## معامل الاختلاف

### Coefficient of Variation

عند مقارنة التشتت لتوزيعين تكرارين لظاهرتين مختلفتين أو أكثر قد نواجه باختلاف وحدات القياس وعليه يلزم أولاً البحث عن مقياس يخلصنا من هذه المشكلة فمثلاً إذا كان الانحراف المعياري للأعمار ٣ سنوات والانحراف المعياري للأجور ٥ دينار ، يتضح أنه لا يمكننا مقارنة التشتت بين هاتين الظاهرتين .

ومعامل الاختلاف يستخدم في مقارنة التشتت بين المجموعات المختلفة وله صورتان .

$$(١) \text{ معامل الاختلاف المعياري} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times ١٠٠$$

$$(١٠ - ٥) \quad \boxed{١٠٠ \times \frac{ع}{س}} =$$

وبلاحظ أننا نحصل على نسبة مئوية من الوسط الحسابي ومحرره من وحدات القياس ومن ثم يمكن استخدامه في مقارنة التشتت بين المجموعات المختلفة .

$$(٢) \text{ معامل الاختلاف الربيعي} = \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{متوسط الربيعين}} \times ١٠٠$$

$$(١١ - ٥) \quad \boxed{١٠٠ \times \frac{١٢ - ٣٢}{١٢ + ٣٢}} =$$



ويستخدم هذه المقياس في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة حيث يتعذر حساب كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري ومن ثم يتعذر حساب معامل الاختلاف المعياري . كذلك لا يجب مقارنة معامل الاختلاف الربيعي لتوزيع معين بمعامل الاختلاف المعياري لتوزيع آخر بل يجب مقارنة التوزيعين باستخدام معاملين للاختلاف محسوبين بنفس الأساس .

مثال ( ٥ - ٧ ) :

احسب معامل الاختلاف المعياري ومعامل الاختلاف الربيعي للتوزيع التكراري الذي يوضح التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى الشركات في مثال ( ٤ - ٥ ) .

الحل : (١) سبق حساب كل من :

$$\text{الوسط الحسابي} = ٣٧,٢٥$$

$$\text{الانحراف المعياري} = ٧,٧٧$$

$$\therefore \text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{\bar{x}}{s} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٧,٧٧}{٣٧,٢٥} \times ١٠٠ = ٢٠,٨ \%$$

(٢) سبق حساب قيمة كل من :

$$\text{الربيع الأدنى ( ١ )} = ٣١,٧٦$$

$$\text{الربيع الأعلى ( ٣ )} = ٤٢,٩٨$$

$$\therefore \text{معامل الاختلاف الربيعي} = \frac{١٣ - ١١}{١١ + ١٣} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣١,٧٦ - ٤٢,٩٨}{٣١,٧٦ + ٤٢,٩٨} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١١,٢٢}{٧٤,٧٤} \times ١٠٠ = ١٥ \%$$

## مقاييس الالتواء

### Measures of Skewness

ذكرنا في نهاية الفصل الرابع أنه برسم المنحنى ومعرفة العلاقة بين الوسط الحسابي والمنوال والوسيط يمكن التعرف على طبيعة التوزيع التكراري من حيث التماثل والالتواء .

ويمكننا التعرف على طبيعة التوزيع من حيث الالتواء باستخدام العلاقات السابقة ومقاييس التشتت ودون رسم المنحنى عن طريق استخدام إحدى صور معامل الالتواء التالية .

$$(١) \text{ معامل الالتواء} = \frac{\text{الوسط الحسابي} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}} \quad (٥ - ١٢)$$

وحيث أن :

$$\text{الوسط الحسابي} - \text{المنوال} = ٣ \text{ (الوسط الحسابي} - \text{الوسيط)}$$

فيمكن الحصول على صورة أخرى لمعامل الالتواء بالتعويض في الصورة الأولى .

$$(٢) \text{ معامل الالتواء} = \frac{٣ \text{ (الوسط الحسابي} - \text{الوسيط)}}{\text{الانحراف المعياري}} \quad (٥ - ١٣)$$

وينسب المعاملان السابقان إلى بيرسون وهناك صورة أخرى لمعامل الالتواء تعتمد فقط على بعض مقاييس الموضع وهي :

$$(٣) \text{ معامل الالتواء} = \frac{(١ - ٣) - (٢ - ٣)}{(١ - ٣)} \quad (٥ - ١٤)$$

حيث أن :

١٣ الربيع الأدنى

١٤ الوسيط

١٥ الربيع الأعلى

وهذه العلاقة يمكن الحصول عليها بالرسم أو بالحساب وتستخدم في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة .

وللتعليق على النتائج المتحصل عليها من معامل الالتواء هناك ثلاث

حالات :

- (١) إذا كان معامل الالتواء يساوي صفراً فإن التوزيع متماثل .
- (٢) إذا كان معامل الالتواء موجباً فإن التوزيع يكون ملتويّاً ناحية اليمين
- (٣) إذا كان معامل الالتواء سالباً فإن التوزيع يكون ملتويّاً ناحية اليسار .

كما سبق عرضه في شكل ( ٤ - ٣ )

مثال ( ٥ - ٨ ) :

احسب الصور المختلفة لمعامل الالتواء للتوزيع التكراري الذي يوضح التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى الشركات في مثال ( ٤ - ٥ ) .

الحل :

الوسط الحسابي = ٣٧,٢٥

الوسيط = ٣٧,٥٥

الانحراف المعياري = ٧,٧٧

الربيع الأدنى = ٣١,٧٦

الربيع الأعلى = ٤٢,٩٨

كذلك فإنه يمكن حساب المنوال بطريقة الرافعة ونجد أن :

$$\text{المنوال} = ٣٧,٦٦$$

ومن ثم يمكن حساب الصور المختلفة لمعامل الالتواء على النحو التالي :

$$(١) \text{ معامل الالتواء} = \frac{\text{الوسط الحسابي} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{٣٧,٦٦ - ٣٧,٢٥}{٧,٧٧}$$

$$= -٠,٥ \text{ (إلتواء سالب)}$$

$$(٢) \text{ معامل الالتواء} = \frac{٣ (\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$$

$$= \frac{٣}{٧,٧٧} = \frac{-٠,٩}{٧,٧٧} = -٠,١١$$

(إلتواء سالب)

$$(٣) \text{ معامل الالتواء} = \frac{(٢٢ - ٢١) - (٢١ - ٢٠)}{٢١ - ٢٠}$$

$$= \frac{(٣١,٧٦ + ٣٧,٥٥) - (٣٧,٥٥ - ٤٢,٩٨)}{(٣١,٧٦ - ٤٢,٩٨)}$$

$$= \frac{-٠,٣٦}{١١,٢٢} = \frac{-٥,٤٣}{١١,٢٢} = -٠,٤٨$$

$$= -٠,٤٨ \text{ (إلتواء سالب)}$$

يلاحظ أنه باستخدام الصور المختلفة وجدنا أن معامل الالتواء سالب

أي أن منحنى التوزيع التكراري يكون ملتوياً ناحية اليسار وبمعنى آخر فإن مفردات هذا التوزيع تتركز في اتجاه الفئات العليا ويمتد ذيل المنحنى التكراري إلى اليسار .

## تمارين الفصل الخامس

(١) احسب المدى والانحراف المتوسط والانحراف المعياري للقيم التالية :

٣٣ ، ٢١ ، ٢٥ ، ١٩ ، ٢٧ ، ٢٢ ، ٢٣

(٢) من الجدول التكراري التالي :

فئات	-١٤	-١٦	-١٨	-٢٠	-٢٢	٢٤ - ٢٦
تكرار	١٣	٢٥	٣٠	٤٠	٢٤	١٥

أ - احسب الانحراف المتوسط والانحراف المعياري .

ب - احسب نصف المدى الربيعي .

(٣) من الجدول التكراري التالي :

فئات	-١٤	-١٥	-١٦	-١٧	-١٨	-١٩	٢٠ - ٢١
تكرار	٧	١١	٢٢	٣٠	١٥	١٢	٣

أ - احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري ومن ثم اشتق

معامل الاختلاف .

ب - معامل الالتواء .

(٤) قارن بين التوائى التوزيعين التكرارين الآتين لأجور عينة من عمال مصنعين :

الفئات	أقل من ٣٠	٣٠ - ٤٠	٤٠ - ٦٠	٦٠ - ٧٠	٧٠ - ٩٠	٩٠ - ١٠٠ فأكثر
عدد عمال المصنع الأول	١٨	٢٢	٣٥	٥٥	٤٠	١٩ ١١
عدد عمال المصنع الثانى	٧	٢٣	٣٠	٥٠	٤٥	٢٥ ٢٠

(٥) أوجد درجة تماثل التوزيع التكرارى الآتى لأجور عمال أحد المصانع :

فئات الأجر	٣٥ -	٤٥ -	٥٥ -	٦٥ -	٧٥ -	٨٥ -	٩٥ - ١٠٥
عدد العمال	١٤	١٨	٢٢	٣٨	١٥	٧	٣

## الفصل السادس

### الأرقام القياسية

#### Index Numbers

مقدمة وتعريف :

في كثير من الأحيان قد نحتاج إلى دراسة التغير في ظاهرة ما من فترة زمنية لأخرى في أماكن مختلفة غالباً ما تكون فيها وحدات القياس مختلفة . والسبيل الوحيد في هذا الشأن هو اللجوء لحساب الأرقام القياسية والتي بدورها تخلصنا من وحدات القياس ومن ثم تسهل عملية المقارنة ودراسة التغيرات بسهولة ويسر . ونشأت فكرة الأرقام القياسية من الرغبة لقياس التغير في الأسعار بين فترات زمنية متتالية ثم تطور استخدامها لقياس التغير الذي يطرأ على الكميات والقيم بين فترات زمنية متعاقبة ، وعليه قد تستخدم الأرقام القياسية لمقارنة ظاهرة بنفسها بين فترتين زمنيتين وفي هذه الحالة يكون الهدف من تركيب الرقم القياسي هو قياس التغير الذي طرأ على ظاهرة معينة كالأسعار مثلاً في فترة من الزمن كأساس . أي أنه في العادة ندرس التغيرات بين فترتين زمنيتين الأولى نبدأ قياس التغير منها وتسمى فترة الأساس والثانية يراد قياس ما تم من تغير عندها وتسمى فترة المقارنة .

أمثلة على الأرقام القياسية :

(١) السرقم القياسي للأسعار :

من اهم مسئوليات الحكومات والنقابات على السواء هي مراقبة الأسعار ومراقبة العلاقة بين حركة مستوى الأسعار والحالة الاقتصادية العامة في

الدولة . فالأسعار هي حد التعامل بين المنتج والمستهلك الذي حصل على أساسه تبادل السلع والخدمات وتشمل إحصاءات الأسعار تسجيل أسعار السلع والخدمات المختلفة من وقت لآخر ثم تركيب الأرقام القياسية للأسعار للدليل على حركة مستوى الأسعار .

والرقم القياسي للأسعار يوضح النسبة بين متوسط الأسعار في سنة معينة إلى متوسط الأسعار في سنة أخرى كأساس . فمثلاً عندما يكون الرقم القياسي للأسعار في سنة ١٩٨٥ إلى سنة ١٩٨٠ هو ١٢٠٪ فهذا يعني أن المتوسط العام للأسعار قد زاد بمعدل ٢٠٪ في سنة ١٩٨٥ بالمقارنة بسنة ١٩٨٠ .

## (٢) الرقم القياسي لأسعار الجملة :

تقوم الإدارة المركزية للإحصاء التابعة لوزارة التخطيط بدولة الكويت بجمع بيانات تفصيلية عن أسعار التجزئة وأسعار الجملة من السلع المتداولة ، وحساب أرقام مناسبة لأسعار الجملة وأسعار التجزئة ونشرها بصفة دورية .

ويتم تركيب هذا الرقم بتسجيل أسعار الجملة للسلع المعينة وتحسب المناسب لكل سلعة ثم يؤخذ متوسط هندسي بسيط للمناسيب بصرف النظر عن أهمية السلع .

## (٣) الرقم القياسي لنفقة المعيشة :

يعطى هذا الرقم التغير في تكلفة المعيشة أي أسعار شراء الحاجيات التي يستهلكها السواد الأعظم من الشعب ويستخدم هذا الرقم بديلاً عن الرقم القياسي لأسعار التجزئة لأن الأسعار التي تدخل في تركيب هذا الرقم هي أسعار التجزئة وذلك لأن المستهلك العادي لا يقوم بشراء حاجياته بالجملة . وسوف نفرق بين ما يسمى بمستوى المعيشة ونفقة المعيشة .



## أ - مستوى المعيشة :

هو كمية ما يستهلكه الفرد في وحدة الزمن ( قد تكون شهراً أو سنة ) من السلع والخدمات .

## ب - نفقة المعيشة :

هي تكلفة ما يستهلكه الفرد من سلع وخدمات . وهذه التكلفة تتأثر بالطبع بارتفاع أو انخفاض مستوى الأسعار بافتراض ثبات مستوى المعيشة ولتركيب هذا الرقم تقوم الإدارة المركزية للإحصاء بجمع بيانات شهرية عن أسعار التجزئة للسلع والأشياء الداخلة في الاستهلاك ويكون لكل منها منسوب السعر في الشهر الحالي بالنسبة للسعر الأساسي ثم يكون لكل واحدة من مجموعات السلع رقم قياسي ( هو في الغالب الوسط الحسابي لمناسيب الأسعار للسلع الداخلة في المجموعة ) على سبيل المثال مجموعات الأغذية والسلع الترفيهية ويكون الرقم القياسي العام هو الوسط المرجح لأرقام المجموعات مرجحة بالأوزان . وهذه الأوزان التي تستخدم لاعطاء أهمية نسبية لمجموعات السلع تختلف فيما بينها من بلد إلى آخر وذلك تبعاً لتوزيع ميزانية الأسرة العادية في كل بلد فمن الملاحظة أن وزن الأغذية مثلاً يأخذ نسبة كبيرة في ميزانية الأسرة في البلاد المختلفة ويأخذ نسبة أصغر في ميزانية الأسرة في البلاد المتقدمة وذلك على عكس السلع الترفيهية أو الكمالية .

ونتيجة لذلك لا يمكن استخدام الأرقام القياسية لنفقة المعيشة في المقارنة بين البلاد المختلفة على علاتها بل يجب أن يشمل الرقم القياسي لنفقة المعيشة كل السلع الضرورية والكمالية وكل مجموعة من السلع يجب أن تعطي لها أوزان حقيقية .

#### (٤) الرقم القياسي للانتاج :

يقيس هذا الرقم التغيرات التي تحدث في كمية الانتاج الكلي أو في الصناعات المنفردة كل عام على حدة . فيوجد الرقم القياسي للانتاج الزراعي والرقم القياسي لانتاج الأرز أو القمح وتستخدم هذه الأرقام كدليل على درجة النشاط الاقتصادي سواء كان دليلاً على الكساد أو الازدهار كذلك يصور الرقم القياسي للانتاج وحركة الانتاج بصورة تفصيلية ( كل شهر أو شهرين ) وبصورة اجمالية ( كل سنة ) .

#### (٥) الرقم القياسي للأجور :

ويصور هذا الرقم التغيرات التي تطرأ على مستوى الأجور من وقت لآخر . ولتركيب هذا الرقم نحدد فترة الأساس ونأخذ مستوى الأجور في الصناعات الهامة أي نحسب المتوسط العام للأجور فيها ونحسب منسوب الأجر في سنة الأساس . ثم نركب من هذه المناسيب الرقم القياسي للأجور مع ترجيح الصناعات المختلفة بما يتناسب وأهميتها . وهذا أفضل من الصناعات المختلفة في سنة معينة لأن جملة ما يدفع من الأجور يمثل في نفس الوقت عدد العمال المستخدمين في الصناعة محل الاعتبار وكذلك متوسط الأجور .

ويستخدم هذا المقياس في ايجاد الرقم القياسي للأجر الحقيقي باستخدام العلاقة .

$$\text{الرقم القياسي للأجر الحقيقي} = \frac{\text{الرقم القياسي للأجور النقدية}}{\text{الرقم القياسي لنفقة المعيشة}} \times 100$$

$$= \frac{\text{الرقم القياسي للأجور النقدية}}{\text{الرقم القياسي للأسعار}} \times 100$$

وهذا الرقم يعطي حقيقة التغير في المستوى الاجتماعي للعمال حيث أن زيادة الأجور النقدية لا تعني في كثير من الأحيان زيادة في الدخل الحقيقي إلا إذا كان الرقم القياسي للأسعار ثابتاً . وارتفاع هذا الرقم يعني ارتفاع مستوى معيشة العاملين .

ولقد اقترح فلورنس في سنة ١٩٢٩ مقياساً لقياس الرفاهية العامة يسمى دليل الرفاهية ويمكن حسابه من العلاقة التالية :

$$\text{دليل الرفاهية} = \frac{\text{الرقم القياسي للأجور} \times \text{النسبة المئوية لعدد العمال المشغلين}}{\text{الرقم القياسي لنفقة المعيشة}}$$

(٦) الرقم القياسي لأسعار الأوراق المالية :

نحسب هذا الرقم لمراقبة حركة أسعار الأوراق المالية فنختار مجموعة من الأوراق المالية التي تمثل السوق تمثيلاً صحيحاً ويتفق على فترة الأساس ثم نحسب المناسيب لسعر كل ورقة مالية على حدة ثم نحسب الرقم القياسي للكل ونأخذ في الاعتبار الأهمية النسبية للأوراق المالية المختلفة الداخلة في الحساب ومن المعروف أن :

$$\text{الرقم القياسي لقيمة النقود} = \frac{1}{\text{الرقم القياسي للأسعار}}$$

على اعتبار أن قيمة وحدة النقد هي كمية السلع والخدمات التي تسيطر عليها وحدة النقد في السوق ، ومقلوب الرقم القياسي للأسعار هو الرقم القياسي لقيمة النقود حيث أن ارتفاع الأسعار يعني انخفاض قيمة النقود وانخفاض مستوى الأسعار يعني ارتفاع قيمة النقود .

وهناك أنواع أخرى من الأرقام القياسية منها على سبيل المثال لا الحصر الأرقام القياسية للنتائج القومي والدخل القومي والصادرات والواردات ، كما توجد هذه الأرقام في صورة تفصيلية وإجمالية كما يوجد لكل قطاع على حدة أي على مستوى القطاع الزراعي والقطاع الصناعي .

وهناك اعتباران يجب الإلمام بهما ودراستهما قبل البدء في تركيب الأرقام القياسية وهما :

#### ١ - اختيار فترة الأساس :

نقطة البدء في تكوين الرقم القياسي هي تحديد فترة الأساس ويشترط فيها أن تكون فترة عادية أو طبيعية خالية من التغيرات غير المنتظمة أو العرضية .

فمثلاً عند اختيار فترة الأساس لرقم قياسي للأسعار نختار فترة خالية من التغيرات الموسمية أي بعيدة عن فترات التضخم والانكماش التي تطرأ على الظواهر الاقتصادية المختلفة .

كذلك يجب مراعاة ألا تكون فترة الأساس بعيدة جداً عن الفترات التي تقاس على أساسها لأن التباعد الزمني يجعل من الصعب علينا الحصول على أسعار نفس السلع في الفترتين فكثير من السلع ربما يكون قد انقرض أو قل استخدامه بين الفترات المتباعدة نظراً لتغير نمط الاستهلاك .

#### ٢ - اختيار المفردات التي يتكون منها الرقم القياسي :

يجب أن تكون الرؤية واضحة عند البداية - إذا اتخذنا الأسعار كمثال - حول ما نستهدف قياسه بواسطة الرقم القياسي للأسعار لأنه لا يمكن القول أنه يوجد رقم قياسي واحد للأسعار فالرقم القياسي يختلف للسلعة الواحدة

باختلاف نوعها (مادة خام أو نصف مصنوعة أو متتية الصنع أو سلعة زراعية أو صناعية . . .) أو اختلاف طريقة بيعها ( مثل أسعار الجملة وأسعار التجزئة).

فمثلاً لقياس التغير في أسعار التجزئة لسلعة كالبرتقال وجب أن يتوافر لدينا سعر التجزئة للبرتقال في فترتي الأساس والمقارنة .

### طرق تركيب الأرقام القياسية

من الواضح أنه ليست هناك مشكلة في قياس تغير سعر سلعة واحدة بين فترتين وعلى سبيل المثال إذا كان سعر كيلو البرتقال في سنة ١٩٨٠ هو ٢٠٠ فلس وكان سعر الكيلو من نفس النوع هو ٣٠٠ فلس سنة ١٩٨٥ ، باختيار سنة ١٩٨٠ كأساس (١٠٠٪)

$$\frac{\text{أسعار المقارنة}}{\text{أسعار الأساس}} = \text{السعر في سنة المقارنة } ١٩٨٥ = ١٠٠ \times$$

$$= \frac{٣٠٠}{٢٠٠} \times ١٠٠ = ١٥٠ \%$$

ونقول في هذه الحالة أن الأسعار زادت بنسبة ٥٠٪ في سنة المقارنة عما كانت عليه في سنة الأساس . أي أن منسوب السعر وهو خارج قسمة السعر في سنة المقارنة على السعر في سنة الأساس يبين التغير بالزيادة أو بالنقص وقدرة في المائة فإذا كان منسوب السعر يزيد عن ١٠٠ فالزيادة عن ١٠٠ تمثل مقدار الزيادة في المائة في فترة المقارنة عن فترة الأساس وإذا كان المنسوب يقل عن ١٠٠ فالفرق بينه وبين ١٠٠ تمثل نقصاً في المائة في فترة المقارنة عن فترة الأساس .

والمشكلة تظهر بوضوح عند دراسة التغير في أسعار سلع مختلفة كثيرة  
بذلك يلزم العثور على صيغة لربط الأسعار المختلفة ببعضها .

قبل التطرق للصيغ الرياضية المختلفة دعنا نستعرض أهم الرموز  
المستخدمة :

ق	ترمز إلى	الرقم القياسي للأسعار
ع ١	ترمز إلى	سعر السلعة في سنة المقارنة
ع ٠	ترمز إلى	سعر السلعة في سنة الأساس
ك ١	ترمز إلى	كمية كل سلعة في سنة المقارنة
ك ٠	ترمز إلى	كمية كل سلعة في سنة الأساس

وأهم الصور الرياضية المستخدمة في حساب الأرقام القياسية هي : -

أولاً : الرقم القياسي التجميعي البسيط :

وصيغته هي :

$$\text{الرقم القياسي للأسعار} = 100 \times \frac{\text{مجموع أسعار سنة المقارنة}}{\text{مجموع أسعار سنة الأساس}}$$

أي أن :

$$(1-6) \quad \boxed{100 \times \frac{\text{مجموع } 1}{\text{مجموع } 0} = ق}$$

الرقم التجميعي البسيط هو أبسط الصيغ التي يمكن استخدامها في  
تركيب الأرقام القياسية ولكن يعيب عليه أنه لا يفرق بين السلع المختلفة  
الداخلية في تركيبه من حيث أهميتها الانتاجية أو الاستهلاكية .

مثال : (٦ - ١)

احسب الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار سنة المقارنة بالنسبة إلى سنة الأساس من الجدول التالي الذي يوضح أسعار ثلاث سلع مختلفة بين سنتي ١٩٨٢ ، ١٩٨٦ باعتبار سنة ١٩٨٢ كأساس .

السلعة	الأسعار بالدينار	
	فترة الأساس ١٩٨٢ ع. ٠	فترة المقارنة ٨٦ ع. ١
أ	٨	١٥
ب	٥	٨
ج	٣	٧
المجموع	١٦	٣٠

$$\therefore \text{ق} = \frac{\text{مجموع ١ ع. ١}}{\text{مجموع ٠ ع. ٠}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣٠}{١٦} \times ١٠٠ = ١٨٧,٥ \%$$

أي أن الأسعار في سنة المقارنة قد زادت بنسبة ٨٧,٥٪ عنها في سنة الأساس .

ثانياً : الرقم القياسي التجميعي المرجح :

للتخلص من عيوب الرقم القياسي التجميعي البسيط نلجأ إلى هذا الرقم وذلك بإعطاء أهمية للسلع المختلفة كل على حسب أهميته ويتم الترجيح في هذه الحالة باستخدام الكميات ، وحيث أن هناك كميات لفترة الأساس وكميات لفترة المقارنة فهناك مقياسان هما :

(أ) الرقم القياسي التجميعي المرجح بكميات الأساس :

ويسمى رقم لاسبير Laspeyres's Index .

$$ق = 100 \times \frac{\text{مجموع أسعار المقارنة} \times \text{كميات الأساس}}{\text{مجموع أسعار الأساس} \times \text{كميات الأساس}}$$

$$(٢-٦) \quad \therefore \quad \boxed{ق = 100 \times \frac{\text{مجموع } ١.ك.}{\text{مجموع } ٠.ك.}}$$

(ب) الرقم القياسي التجميعي المرجح بكميات المقارنة :

ويسمى رقم باشي Paasche Index .

$$ق = 100 \times \frac{\text{مجموع أسعار المقارنة} \times \text{كميات المقارنة}}{\text{مجموع أسعار الأساس} \times \text{كميات المقارنة}}$$

$$(٣-٦) \quad \boxed{ق = 100 \times \frac{\text{مجموع } ١.ك.}{\text{مجموع } ٠.ك.}}$$

مثال : (٢-٦) :

احسب الرقم القياسي التجميعي المرجح من الجدول التالي الذي يوضح كميات وأسعار ثلاث سلع مختلفة بين ستي ١٩٨٢ ، ١٩٨٦ .

(اعتبر سنة ١٩٨٢ هي الأساس) .



السلع	سنة ١٩٨٢		سنة ١٩٨٦	
	الأسعار	الكميات بالآلاف طن	الأسعار	الكميات بالآلاف طن
أ	٨	٨٠	١٥	١٠٠
ب	٥	٤٠	٨	٥٠
ج	٣	٦٠	٧	١٢٠

الحل :

( أ ) باستخدام كميات سنة الأساس ( لاسبير )

السلع	ع .	ع ١	ك .	ع ١ ك .	ع . ك .
أ	٨	١٥	٨٠	١٢٠٠	٦٤٠
ب	٥	٨	٤٠	٢٢٠	٢٠٠
ج	٣	٧	٦٠	٤٢٠	١٨٠
المجموع				١٩٤٠	١٠٢٠

$$ق = \frac{\text{مجموع ١ ك.}}{\text{مجموع ك.}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٩٤٠}{١٠٢٠} \times ١٠٠ = ١٩٠,٢\%$$

أي أن الأسعار زادت بنسبة ٩٠,٢٪ في سنة ١٩٨٦ عنها في سنة

١٩٨٢ .

(ب) باستخدام كميات سنة المقارنة (باشي)

السلع	ع. ٠	ع ١	ك ١	ع ١ ك	ع. ٠ ك
أ	٨	١٥	١٠٠	١٥٠٠	٨٠٠
ب	٥	٨	٥٠	٤٠٠	٢٥٠
جـ	٣	٧	١٢٠	٨٤٠	٣٦٠
المجموع				٢٧٤٠	١٤١٠

$$\therefore ق = \frac{\text{مجموع } ١ ك}{\text{مجموع } ٠ ك} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٧٤٠}{١٤١٠} \times ١٠٠ = ١٩٤,٣٣\%$$

أي أن الأسعار في ١٩٨٦ قد زادت بنسبة ٩٤,٣٣٪ عنها في سنة ١٩٨٢ .

ثالثاً : الرقم القياسي الأمثل (رقم فيشر) Fisher Index :

استطاع فيشر أن يتوصل إلى صيغة رياضية جديدة وذلك بإدماج الرقمين التجميعين المرجحين (رقم لاسبير ورقم باشي) باستخدام فكرة الوسط الهندسي على النحو التالي :

$$\sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باشي}} = \text{الرقم القياسي الأمثل}$$

$$ق = \sqrt{١٠٠ \times \frac{\text{مجموع } ١ ك}{\text{مجموع } ٠ ك} \times \frac{\text{مجموع } ٠ ك}{\text{مجموع } ١ ك}}$$

(٦ - ٤)

ويمتاز هذا الرقم بأنه يحقق شرطي الانعكاس في الزمن وفي المعامل وهي من الصفات النظرية الأساسية التي يتطلبها تكوين رقم قياسي والتي سنوضحها فيما بعد .

مثال : ( ٦ - ٣ ) :

احسب الرقم القياسي الأمثل من المثال السابق .

الحل :

$$\sqrt{\text{الرقم القياسي الأمثل} = \text{لاسيير} \times \text{باشي}}$$

$$= \sqrt{194,33 \times 190,2} = 192,25\%$$

أي أن أسعار سنة المقارنة تزيد بنسبة ٩٢,٢٥٪ عنها في سنة الأساس .

رابعاً : الرقم القياسي للمناسيب

المنسوب : هو نسبة سعر إلى سعر آخر أي أن :

( ٦ - ٥ )

$$\boxed{\frac{١٤}{٠٤} = ( ٢ ) \text{ المنسوب}}$$

ويفضل البعض استخدام المناسيب لأنها تأخذ في الاعتبار علاقة السعر بطبيعة السلعة ذاتها لأن سعر كل سلعة مرتبط بالسلعة نفسها من حيث كونها متوفرة أو نادرة ومن حيث كونها معتدلة الطلب أو حادة الطلب . . . مما يؤثر على السعر ارتفاعاً وانخفاضاً ونستخدم فكرة الأوساط الحسابية والهندسية في حساب الأرقام القياسية للمناسيب والتي يمكن تلخيصها فيما يلي : -

## أ - باستخدام الوسط الحسابي

١ - الوسط الحسابي للمناسيب البسيطة :

(٦-٦)

$$ق = \frac{مجم}{ن} \times ١٠٠$$

٢ - الوسط الحسابي للمناسيب المرجحة :

نستخدم في ترجيح مناسيب الأسعار الأوزان أي حاصل ضرب الكمية في السعر بينما استخدمنا في ترجيح الأسعار الكميات فقط لأن مناسيب السلع إذا رجحت بالكميات المناظرة مع اختلاف وحداتها فإنه يتعذر الحصول على متوسط لها لعدم إمكانية الحصول على مجموعها .

ونستخدم الصورة التالية :

(٧-٦)

$$ق = \frac{مجم و}{مجم و} \times ١٠٠$$

حيث (و) تشير إلى الوزن ويمكن أن تأخذ إحدى الصور التالية :

$$و = ع \times ك (أوزان سنة المقارنة)$$

$$و = ع \times ك (أوزان سنة الأساس)$$

$$و = ع \times ك (أسعار المقارنة \times كميات الأساس)$$

$$و = ع \times ك (أسعار الأساس \times كميات المقارنة)$$

ب - باستخدام الوسط الهندسي

١ - الوسط الهندسي للمناسيب البسيطة :

$$(٨ - ٦) \quad \sqrt[n]{100 \times \text{م} \times \dots \times \text{م} \times 100} = \text{ق}$$

حيث (ن) عدد السلع الداخلة في تركيب الرقم القياسي .

٢ - الوسط الهندسي للمناسيب المرجحة :

$$(٩ - ٦) \quad \sqrt[\text{مجمو}]{100 \times \text{م} \times \dots \times \text{م} \times 100} = \text{ق}$$

حيث (و ، م ، م ، م ، م ، م) هي أوزان السلع الداخلة في تركيب الرقم القياسي وأن :

$$\text{مجمو} = \text{و} + \text{م} + \dots + \text{م} + \text{و}$$

مثال : ( ٦ - ٤ ) :

من بيانات المثال السابق احسب :

- ١ - الوسط الحسابي للمناسيب البسيطة .
- ٢ - الوسط الحسابي للمناسيب المرجحة ( باستخدام أوزان الأساس ) .
- ٣ - الوسط الهندسي للمناسيب البسيطة .
- ٤ - الوسط الهندسي للمناسيب المرجحة ( باستخدام أوزان الأساس )

الحل :

السلع	١٤	٠٤	ك	ك	المنسوب $\frac{١٤}{٠٤} = م$	أوزان الأساس و.ع.ك.	م و
أ	١٥	٨	١٠٠	٨٠	١,٩	٦٤٠	١٢١٦
ب	٨	٥	٥٠	٤٠	١,٦	٢٠٠	٣٢٠
ج	٧	٣	١٢٠	٦٠	٢,٣	١٨٠	٤١٤
المجموع					٥,٨	١٠٢٠	١٩٥٠

$$١ - \text{الوسط الحسابي للمناسيب البسيطة} = \frac{\text{مجموع}}{ن} \times ١٠٠$$

$$= ١٠٠ \times \frac{٥,٨}{٣} = ١٩٣,٣\%$$

∴ الأسعار زادت بنسبة ٩٣,٣٪ في سنة المقارنة عنها في سنة الأساس

$$٢ - \text{الوسط الحسابي للمناسيب المرجحة (بأوزان الأساس)}$$

$$= \frac{\text{مجموع و}}{\text{مجموع}} \times ١٠٠ \quad \text{حيث } و.ع.ك. \times ك.$$

$$= ١٠٠ \times \frac{١٩٥٠}{١٠٢٠} = ١٩١,١٨\%$$

∴ الأسعار زادت بنسبة ٩١,١٨٪ في سنة المقارنة عنها في

سنة الأساس .

٣ - الوسط الهندسي للمناسيب البسيطة :

$$Q = \sqrt[3]{100 \times 33 \times 22 \times 12}$$

$$= \sqrt[3]{100 \times 2,3 \times 1,7 \times 1,9}$$

باستخدام اللوغاريتمات :

$$\text{لوق} \frac{1}{3} = \text{لو}(2,3 \times 1,7 \times 1,9)$$

$$= \frac{1}{3} (\text{لو} 2,3 + \text{لو} 1,7 + \text{لو} 1,9)$$

$$= \frac{1}{3} (,3617 + ,2041 + ,2788)$$

$$= \frac{,8446}{3} = ,2815$$

ومن الأعداد المقابلة للوغاريتمات

$$Q = 191,2\%$$

∴ الأسعار زادت بنسبة ٩١,٢٪ في سنة المقارنة عنها في سنة الأساس.

٤ - الوسط الهندسي للمناسيب المرجحة (بأوزان الأساس)

$$Q = \sqrt[3]{100 \times \frac{33}{33} \times \frac{22}{22} \times \frac{12}{12}}$$

$$= \sqrt[3]{100 \times 180(2,3) \times 200(1,7) \times 740(1,9)}$$

وباستخدام اللوغاريتمات :

$$\text{لوق} = \frac{1}{1020} (٦٤٠ \text{ لو } ١,٩ + ٢٠٠ \text{ لو } ١,٦ + ١٨٠ \text{ لو } ٢,٣)$$

$$= \frac{1}{1020} (٣٦١٧ \times ١٨٠ + ,٢٠٤١ \times ٢٠٠ + ,٢٧٨٨ \times ٦٤٠)$$

$$= \frac{1}{1020} (٢٧٨٨ + (٦٥,١٠٦ + ٤٠,٨٢ + ١٧٨,٤٣٢) = ,٢٧٨٨$$

ومن الأعداد المقابلة للوغاريتمات :

$$\text{ق} = ١٩٠\%$$

أي أن الأسعار زادت بنسبة ٩٠٪ في سنة المقارنة عنها في سنة الأساس .

الأرقام القياسية للكميات :

أخذنا في عرضنا السابق الأسعار كمثال لتكوين الأرقام القياسية ، وبالمثل يمكن تكوين أرقام قياسية للكميات بنفس الطرق السابقة مع ملاحظة استخدام الأسعار أو القيم كأوزان . وعلى سبيل المثال :

١ - الرقم القياسي البسيط للكميات :

$$\text{ق} = \frac{\text{مجدك}^١}{\text{مجدك}} \times ١٠٠$$

٢ - الرقم القياسي المرجح للكميات بأسعار الأساس ( لاسبير ) :

$$\text{ق} = \frac{\text{مجدك}^١ \cdot \text{ع}}{\text{مجدك} \cdot \text{ع}} \times ١٠٠$$



٣- الرقم القياسي المرجح للكميات بأسعار سنة المقارنة (باشي) :

$$ق = \frac{\text{مجموع } ١٤ \text{ ك}}{١٠٠ \times \text{مجموع } ١٤ \text{ ك.}}$$

٤- الرقم القياسي الأمثل للكميات (فيشر) :

$$ق = \sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باشي}}$$

الأرقام القياسية للقيم :

يمكن تركيب أرقام قياسية للقيم بنفس الطرق السابقة ونأخذ على سبيل المثال : -

$$\text{الرقم القياسي البسيط للقيم} = \frac{\text{مجموع قيم سنة المقارنة}}{١٠٠ \times \text{مجموع قيم سنة الأساس}}$$

$$ق = \frac{\text{مجموع } ١٤ \text{ ك}}{١٠٠ \times \text{مجموع } ١٤ \text{ ك.}}$$

## الأرقام القياسية بأساس ثابت والأرقام القياسية بأساس متحرك

نلجأ إلى حساب الأرقام القياسية بأساس متحرك لإيجاد مرونة غير متوفرة في الأرقام القياسية بأساس ثابت وذلك إذا ما توافرت لدينا سلسلة زمنية من البيانات .

فإذا كان لدينا سلسلة من الأرقام القياسية على النحو التالي :

- الرقم القياسي للأسعار في سنة ١٩٨٣ بالنسبة إلى سنة ١٩٨٢ وترمز له بالرمز (ق١٠) .
  - الرقم القياسي للأسعار في سنة ١٩٨٤ بالنسبة إلى سنة ١٩٨٣ وترمز له بالرمز (ق٢١) .
  - الرقم القياسي للأسعار في سنة ١٩٨٥ بالنسبة إلى سنة ١٩٨٤ وترمز له بالرمز (ق٣٢) .
  - الرقم القياسي للأسعار في سنة ١٩٨٦ بالنسبة إلى سنة ١٩٨٥ وترمز له بالرمز (ق٤٣) .
- وهكذا .

وتسمى هذه بسلسلة الأرقام القياسية بأساس متحرك حيث أن الأساس يتحرك من سنة إلى أخرى ومن الواضح أنه توجد علاقة بين الأرقام القياسية بأساس متحرك والأرقام القياسية بأساس ثابت حيث أن :

ق.٤٠ = ق.١٠ × ق.٢١ × ق.٣٢ × ق.٤٣ يعطينا الرقم القياسي لسنة ١٩٨٦  
بالنسبة إلى سنة ١٩٨٢ كأساس كذلك فإن

ق.٢٠ = ق.١٠ × ق.٢١ يعطي الرقم القياسي لسنة ١٩٨٤ بالنسبة لسنة ١٩٨٢ .

ق.٣٠ = ق.١٠ × ق.٢١ × ق.٣٢ يعطي الرقم القياسي لسنة ١٩٨٥ بالنسبة لسنة ١٩٨٢ .

مثال (٦ - ٥) :

البيانات التالية توضح أسعار ثلاث سلع تقوم بانتاجها إحدى الشركات الكبرى في الفترة ما بين سنة ١٩٨٢ حتى عام ١٩٨٦ .

السلع	السنوات	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦
( أ )	١٨٠	١٨٢	١٨٥	١٩٠	١٨٥	
( ب )	١٩٥	١٩٧	١٩٢	١٩٤	١٩٣	
( جـ )	١١٠	١١٥	١٢٠	١٣٠	١٣٥	
المجموع	٤٨٥	٤٩٤	٤٩٧	٥١٤	٥١٣	

والمطلوب :

حساب الأرقام القياسية بأساس متحرك ثم أوجد رقم قياسي لكل سنة على حدة .

الحل :

بافتراض سنة ١٩٨٢ كأساس (١٠٠٪) ونجري الحسابات التالية :  
بالنسبة إلى سنة ١٩٨٣ :

$$\text{السلعة (أ)} = 100 \times \frac{182}{180} = 101,11\%$$

$$\%101,03 = 100 \times \frac{197}{190} = \text{السلعة (ب)}$$

$$\%104,00 = 100 \times \frac{110}{110} = \text{السلعة (ج)}$$

بالنسبة إلى سنة ١٩٨٤ :

$$\%101,60 = 100 \times \frac{180}{182} = \text{السلعة (أ)}$$

$$\%97,46 = 100 \times \frac{192}{197} = \text{السلعة (ب)}$$

$$\%104,30 = 100 \times \frac{120}{110} = \text{السلعة (ج)}$$

بالنسبة إلى سنة ١٩٨٥ :

$$\%102,70 = 100 \times \frac{190}{180} = \text{السلعة (أ)}$$

$$\%101,04 = 100 \times \frac{194}{192} = \text{السلعة (ب)}$$

$$\%108,33 = 100 \times \frac{130}{120} = \text{السلعة (ج)}$$

بالنسبة إلى سنة ١٩٨٦ :

$$\%97,37 = 100 \times \frac{180}{190} = \text{السلعة (أ)}$$

$$\%99,48 = 100 \times \frac{192}{194} = \text{السلعة (ب)}$$

$$\%103,80 = 100 \times \frac{130}{120} = \text{السلعة (ج)}$$

والمجدول التالي يلخص هذه الحسابات ويشمل الأرقام القياسية لكل سنة  
بأساس متحرك :

السلع	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦
(أ)	١٠٠	١٠١,١١	١٠١,٦٥	١٠٢,٧٠	٩٧,٣٧
(ب)	١٠٠	١٠١,٠٣	٩٧,٤٦	١٠١,٠٤	٩٩,٤٨
(ج)	١٠٠	١٠٤,٥٥	١٠٤,٣٥	١٠٨,٣٣	١٠٣,٨٥
المجموع	٣٠٠	٣٠٦,٦٩	٣٠٣,٤٦	٣١٢,٠٧	٣٠٠,٧٠
المتوسط	١٠٠	١٠٢,٢٣	١٠١,١٥	١٠٤,٠٢	١٠٠,٢٣
المتوسط بأساس متحرك	١٠٠	١٠٢,٢٣	٩٨,٩٤	١٠٢,٨٤	٩٦,٣٦

## اختبار الأرقام القياسية

اقترح فيشر اختبارين لاختبار الأرقام القياسية هما :

١ - اختبار الانعكاس الزمني .

٢ - اختبار الانعكاس المعاملي .

والرقم القياسي الذي يحقق هذين الاختبارين يعتبر رقماً قياسياً أمثلاً .  
وسوف نتحقق من أن رقم فيشر هو الرقم الوحيد الذي يحقق هاذين الاختبارين .

أولاً : اختبار الانعكاس الزمني :

مضمون هذا الاختبار أنه بتغيير سنة الأساس إلى سنة مقارنة وسنة المقارنة إلى سنة الأساس فإنه يلزم أن تتحقق القاعدة التالية :

الرقم القياسي  $\times$  البديل الزمني له = ١

وبصورة رمزية نجد أنه لتطبيق هذا الاختبار فإن :

١ع	تتحول إلى	٠ع
٠ع	تتحول إلى	١ع
ك	تتحول إلى	ك
ك	تتحول إلى	ك

وبتطبيق ذلك على الأرقام القياسية السابقة فنجد أن :

١ - الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار يحقق شرط الانعكاس الزمني

$$\text{حيث أن الرقم القياسي التجميعي البسيط} = \frac{\text{مجمع } ١ع}{\text{مجمع } ٠ع}$$

$$\frac{\text{مجمع.}}{\text{مجمع.}} = \text{البديل الزمني له}$$

ويتطابق قاعدة الاختبار نجد أن :

$$1 = \frac{\text{مجمع.}}{\text{مجمع.}} \times \frac{\text{مجمع.}}{\text{مجمع.}}$$

وكذلك يمكن إثبات أن الأرقام القياسية التجميعية البسيطة للكميات والقيم تحقق شرط الانعكاس الزمني أيضاً .

٢ - الرقم القياسي التجميعي المرجح للأسعار بكميات الأساس ( لاسبير ) لا يحقق شرط الانعكاس الزمني لأن :

$$\frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} = \text{رقم لاسبير}$$

$$\frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} = \text{البديل الزمني}$$

∴ الرقم القياسي × بديلة الزمني

$$1 \neq \frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} \times \frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} =$$

وبالمثل يمكن إثبات أن الرقم القياسي التجميعي المرجح للأسعار بكميات سنة المقارنة (باشي) لا يحقق شرط الانعكاس الزمني أيضاً .

٣ - الرقم القياسي لفischer يحقق شرط الانعكاس الزمني حيث أن :

$$\sqrt{\frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} \times \frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}}} = \text{رقم فيشر}$$

$$\frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} \times \frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} \sqrt{=} \text{البديل الزمني}$$

ومن ثم نجد أن الرقم القياسي  $\times$  بديله الزمني

$$1 = \frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} \times \frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} \sqrt{=} \times \frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} \times \frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} \sqrt{=}$$

### ثانياً : اختبار الانعكاس المعاملي

مضمون هذا الاختبار أننا نحصل على البديل المعاملي لأي رقم قياسي وذلك بتحويل الكميات إلى أسعار والأسعار إلى كميات أي أن :

ك تحول إلى ع

ع تحول إلى ك

ويلزم أن تتحقق القاعدة التالية :

الرقم القياسي  $\times$  البديل المعاملي = منسوب القيم

$$\frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} = \frac{\text{القيمة في سنة المقارنة}}{\text{القيمة في سنة الاساس}} =$$

ويتطبيق هذا الاختبار على الأرقام القياسية التي سبق دراستها نجد أن :

١ - الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار :

$$\frac{\text{مجمع. ق.}}{\text{مجمع. ق.}} =$$

$$\frac{\text{مجمع. ك.}}{\text{مجمع. ك.}} = \text{البديل المعاملي}$$



∴ الرقم القياسي × البديل المعاملي

$$\frac{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}}{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}} \neq \frac{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}}{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}} \times \frac{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}}{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}} =$$

∴ الرقم التجميعي البسيط للأسعار لا يحقق الانعكاس المعاملي بالرغم من أنه حقق شرط الانعكاس الزمني .

٢ - الرقم القياسي لفischer :

$$Q = \sqrt{\frac{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}}{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}} \times \frac{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}}{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}}}$$

$$\sqrt{\frac{\text{مجموع } ١ \text{ ع.}}{\text{مجموع } ١ \text{ ع.}} \times \frac{\text{مجموع } ١ \text{ ع.}}{\text{مجموع } ١ \text{ ع.}}} = \text{البديل المعاملي}$$

∴ الرقم الزمني × البديل المعاملي

$$= \sqrt{\frac{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}}{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}} \times \frac{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}}{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}}} \times \sqrt{\frac{\text{مجموع } ١ \text{ ع.}}{\text{مجموع } ١ \text{ ع.}} \times \frac{\text{مجموع } ١ \text{ ع.}}{\text{مجموع } ١ \text{ ع.}}}$$

$$= \frac{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}}{\text{مجموع } ١ \text{ ك.}} = \frac{(\text{مجموع } ١ \text{ ك.})^2}{(\text{مجموع } ١ \text{ ك.})^2} = \text{منسوب القيم}$$

∴ الرقم القياسي لفischer يحقق شرط الانعكاس المعاملي فضلاً على أنه يحقق شرط الانعكاس الزمني . ومن هنا كانت تسميته بالرقم القياسي الأمثل .

ويستطيع القارئ أن يثبت أن جميع المقاييس الأخرى لا تحقق شرط الانعكاس المعاملي .

## تمارين الفصل السادس

(١) الجدول التالي يوضح أسعار السلع وكمياتها في سنة ٨٥ ، سنة ١٩٨٦ :

السلعة	الأسعار		الكميات	
	سنة ١٩٨٥	سنة ١٩٨٦	سنة ١٩٨٥	سنة ١٩٨٦
أ	١١٢٥	١٥٠٠	٣١	٣٧
ب	٢٣٠	٢٢٥	٥٠	٦١
جـ	٤٥٠	٣٥٠	٥٦	٤٥
د	٧٥	٩٥	١٤٣	١٥٤

باعتبار سنة ١٩٨٥ كأساس احسب :

- أ - الرقم التجميعي البسيط وكذلك رقم لاسبير ورقم باشي .  
 ب - الرقم القياسي الأمل : رقم فيشر).  
 جـ - الرقم القياسي للمناسيب البسيطة والمرجحة بأوزان سنة المقارنة باستخدام فكرة الوسط الحسابي والوسط الهندسي .

(٢) فيما يلي متوسط الأجور الشهرية بالآلاف دينار في بعض أوجه النشاط الاقتصادي في شهر أكتوبر ١٩٨٢ وأكتوبر ١٩٨٥ .

السنة	الصناعات التحويلية	التجارة	الكهرباء والغاز	المتاجم والمتاجر
١٩٨٢	٣١٨	٢٨٦	٤٣٢	٥٢٧
١٩٨٥	٢٥٦	٤٢٢	٣٤٨	٤٥٥

والمطلوب تركيب رقم قياسي بسيط للأجور من سنة ١٩٨٥ بالنسبة إلى سنة ١٩٨٢ كأساس .

(٣) فيما يلي أرقام لمتوسطات الأجور الشهرية بالآلاف دينار وعدد العمال في محافظات الكويت في ستي ١٩٨٤ ، ١٩٨٥ والمطلوب تركيب رقم قياسي للأجور على أحسن صورة تراها باعتبار سنة ١٩٨٤ كأساس .

المحافظة	عدد العمال بالآلاف		متوسط الأجر الشهري بالآلاف دينار	
	٨٤	٨٥	١٩٨٤	١٩٨٥
العاصمة	١٩١	١٩٧	٣٤٢	٣٩٦
حولي	١٢٢	١٣٠	٣٣١	٣٤٠
الاحدي	١١	١٣	٢٥١	٢٧٠
الجهراء	٥	٦	٢٥٤	٢٧٤

(٤) بافتراض أن السلع اليومية التي تستخدمها الأسر عددها سبعة . ونفترض أن أسعارها وكمياتها في السنوات ١٩٨٠ ، ١٩٨٥ كما يلي :

رقم السلعة	أسعار الوحدة لكل سلعة		الكميات المستخدمة
	١٩٨٠	١٩٨٥	سنة ١٩٨٥
(١)	٢٥	٣٠	٤٠ وحدة
(٢)	١٧	٣٥	٢٠ كجم
(٣)	٣٥	٣٧	٢ كجم
(٤)	٤٥	٥٥	٣٠ لتر
(٥)	١٧	١٨	٢٠ لتر
(٦)	١٥	٢٥	٢٥ لتر
(٧)	٧٥	٨٠	١٠ وحدات

والمطلوب حساب الرقم القياسي لتكلفة المعيشة .

(٥) احسب الرقم القياسي لمستوى المعيشة من البيانات التالية :

السلع	الكميات التي يستهلكها الفرد في السنة	
	١٩٨٥	١٩٧٥
(١)	١٥٠	١٢٠
(٢)	١٢٠	٢١٠
(٣)	٣١٥	٣١٠
(٤)	٢٠٠	٢٢٠

(٦) احسب الرقم القياسي لتكلفة المعيشة من الجدول التالي :

مجموع السلع	الأرقام القياسية	النسبة المتفقة من الدخل على كل مجموعة من السلع
الطعام	%٤٥٠	%٤٠
الأقمشة	%٢٠٠	%١٥
اسكان	%٢٥٠	%٢٠
وقود واطاعة	%١٥٠	%١٠
سلع وخدمات متنوعة	%٢٤٠	%١٥

(٧) أوجد الرقم القياسي الأمثل (رقم فيشر) للأسعار بافتراض ١٩٨٠ سنة الأساس باستخدام البيانات التالية :

الكميات		الأسعار		السلعة
١٩٨٥	١٩٨٠	١٩٨٥	١٩٨٠	
١٠	١٠	٦	٥	أ
٦٠	٤٠	٨	٨	ب
١٠	٢٠	١٥	١٢	جـ

(٨) فيما يلي بيان عن أسعار الجملة وكميات التعامل لثلاث سلع في ستي  
١٩٨٢ ، ١٩٨٦ .

١٩٨٦		١٩٨٢		السلعة
الكميات	الأسعار	الكميات	الأسعار	
٢٠	٥	١٥	١	الأولى
٢٥	٦	٢٠	٢	الثانية
٢٠	٧	١٥	٣	الثالثة

بإستخدام سنة ١٩٨٢ كأساس أوجد الرقم القياسي الأمثل للكميات  
والرقم القياسي الأمثل للأسعار والرقم القياسي للقيمة .



## الفصل السابع

### الارتباط Correlation

#### مقدمة : -

تركزت دراستنا في الفصول الخمسة السابقة على دراسة توزيع متغير واحد وامتدت دراستنا بعد تبويب وعرض البيانات المتعلقة بهذا المتغير إلى التعبير عن التوزيع التكراري بقيمة واحدة باستخدام أحد المقاييس الاحصائية سواء كانت مقاييس للنزعة المركزية أو مقاييس للتشتت أو مقاييس لدراسة درجة تماثل أو التواء توزيع المتغير موضع الدراسة .

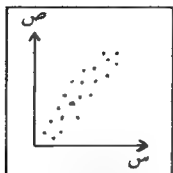
وفي هذا الفصل تمتد دراستنا لدراسة العلاقة بين ظاهرتين أو متغيرين ففي حياتنا اليومية نشاهد ظواهر عديدة يوجد بينهما علاقة أو ارتباط والارتباط قد يكون موجباً أو طردياً بمعنى أن هناك ترابطاً في نفس الاتجاه بين الظاهرتين فعلى سبيل المثال ظاهرتنا الأرباح والمبيعات فكلما زادت المبيعات زادت الأرباح كذلك الدخل والانفاق فكلما زاد الدخل زاد الانفاق على السلع والخدمات .

وأيضاً الارتباط قد يكون عكسياً أو سالباً بمعنى الترابط بين الظاهرتين يكون في الاتجاه العكسي ومن أمثلة ذلك ظاهرتنا الأرباح والمصاريف الادارية فكما زادت المصاريف الإدارية قلت الأرباح وكذلك العلاقة بين الادخار والانفاق على السلع الكمالية .

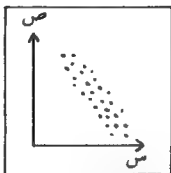
#### أشكال الانتشار :

يمكن وبمجرد النظر التعرف على نوع العلاقة بين ظاهرتين باستخدام اشكال الانتشار بالاستعانة بالتمثيل البياني لبيانات الظاهرتين موضع الدراسة .

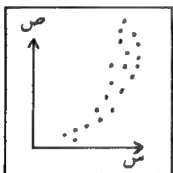
ولتوضيح ذلك نفترض أن لدينا ظاهرتين (س، ص) وبالتعبير عن مجموعات قيم الظاهرتين بنقط نحصل على واحد من الاشكال الآتية :



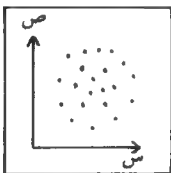
شكل ( ٢-٧ )  
علاقة خطية طردية



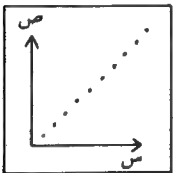
شكل ( ١-٧ )  
علاقة خطية عكسية



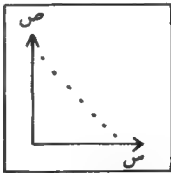
شكل ( ٤-٧ )  
علاقة غير خطية



شكل ( ٣-٧ )  
عدم وجود علاقة



شكل ( ٦-٧ )  
ارتباط طردي تام



شكل ( ٥-٧ )  
ارتباط عكسي تام



ويلاحظ من الأشكال السابقة ما يلي :

١ - في شكل (٧-١) يتضح اتجاه الحزمة من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين أي أن المتغير (ص) يقل بزيادة المتغير (س) أي أن العلاقة عكسية أو سالبة بين المتغيرين .

٢ - في شكل (٧-٢) يتضح اتجاه الحزمة من أعلى اليمين إلى أدنى اليسار أي أن المتغير (ص) يزيد بزيادة المتغير (س) أي أن العلاقة طردية أو موجبة بين المتغيرين .

٣ - في شكل (٧-٣) يتضح عدم وجود علاقة بين المتغيرين (س، ص) في هذه الحالة نجد أن معامل الارتباط = صفر .

٤ - في شكل (٧-٤) يتضح وجود علاقة غير خطية بين المتغيرين (س، ص) .

٥ - في شكل (٧-٥) يتضح أن العلاقة عكسية وتامة بمعنى أن جميع أزواج القيم للمتغيرين تقع جميعها على خط واحد ومعامل الارتباط = - ١ .

٦ - في شكل (٧-٦) تتضح أن العلاقة طردية وتامة وفي هذه الحالة يكون معامل الارتباط = ١ .

خصائص معامل الارتباط :

يمتاز معامل الارتباط بعدة خصائص تساعد على تسهيل العمليات الجبرية الخاصة بحسابه أهمها :

١ - طرح مقادير ثابتة من قيم المتغيرين (س، ص) لا يؤثر على قيمة معامل الارتباط وذلك عن طريق اختيار وسط فرضي لكل من الظاهرتين ولنفرض أنهما (أ ، ب) على الترتيب ونحصل على الانحرافات

البسيطة لقيم (س) وهي ح س = س - أ والانحرافات البسيطة لقيم (ص) وهي ح س = ص - ب ومن ثم يمكن استخدام الانحرافات البسيطة بدلاً من القيم الأصلية في حساب معامل الارتباط دون أي تأثير .

٢ - قسمة قيم كل من المتغيرين على مقادير ثابتة لا يؤثر على قيمة معامل الارتباط بينهما ، أي انه يمكن تسهيل العمليات الجبرية باستخدام فكرة الانحرافات المختزلة . فإذا فرضنا أن الثابتين ث<sub>١</sub> ، ث<sub>٢</sub> يمكن أن نقبل القسمة عليهما ح س ، ح ص على الترتيب فنحصل على الانحرافات المختزلة لقيم س = ح' س = ح س ÷ ث<sub>١</sub> والانحرافات المختزلة لقيم ص = ح' ص = ح ص ÷ ث<sub>٢</sub>

ومن ثم يمكن استخدام الانحرافات المختزلة بدلاً من القيم الأصلية أو الانحرافات البسيطة في حساب معامل الارتباط دون أي تأثير وذلك على عكس الوسط الحسابي والانحراف المعياري .

٣ - تنحصر قيمة معامل الارتباط بين + ١ ، - ١ فإذا فرضنا أن ( ر ) ترمز لمعامل الارتباط فإنه يلزم أن يكون :

$$-1 \leq r \leq 1$$

حساب معامل الارتباط الخطي :

لحساب معامل الارتباط بين الظواهر الكمية فهناك حالتين يجب أن نميز بينهما :

أولاً : حساب معامل الارتباط للبيانات غير المبوبة :

نفرض أن المتغير الأول (س) ومفرداته هي :

س١ ، س٢ ، س٣ ، ..... ، س٤٠

وسطه الحسابي  $\bar{x}$  وانحرافه المعياري  $s$   
 ونفرض أن المتغير الثاني ( $y$ ) ومفرداته هي :  
 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$   
 وسطه الحسابي  $\bar{y}$  وانحرافه المعياري  $s_y$

ولقد عرف بيرسون الارتباط بأنه متوسط حاصل ضرب انحرافي المتغيرين ( $x, y$ ) عن وسطيهما الحسابيين بعد تخليصهما من وحدات القياس بالقسمة على الانحراف المعياري لكل منهما .

ومن ثم يمكن تعريف معامل ارتباط بيرسون على النحو التالي :

$$r = \frac{\text{مجد}(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n \cdot s_x \cdot s_y} \quad (٧ - ١)$$

ويلاحظ صعوبة استخدام هذه الصورة في الحساب ولتسهيل الحصول على معامل الارتباط نلاحظ أن :

$$\text{مجد}(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = \text{مجد}(x \cdot y - x \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y})$$

$$= \text{مجد } x \cdot y - \bar{y} \cdot \text{مجد } x - \bar{x} \cdot \text{مجد } y + n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$+ n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$= \text{مجد } x \cdot y - \bar{y} \cdot \text{مجد } x - \bar{x} \cdot \text{مجد } y + n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$+ n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$= \text{مجد } x \cdot y - \bar{y} \cdot \text{مجد } x - \bar{x} \cdot \text{مجد } y + n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$= \frac{\text{مجد}(x \cdot y) - (\bar{y} \cdot \text{مجد } x) - (\bar{x} \cdot \text{مجد } y) + n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{n}$$

$$\text{وحيث أن : } r = \frac{\sqrt{\frac{\text{مجد } x \cdot y}{n} - \left(\frac{\text{مجد } x}{n}\right) \left(\frac{\text{مجد } y}{n}\right)}}{\sqrt{\frac{\text{مجد } x^2}{n} - \left(\frac{\text{مجد } x}{n}\right)^2} \sqrt{\frac{\text{مجد } y^2}{n} - \left(\frac{\text{مجد } y}{n}\right)^2}}$$

وبالتعويض عن هذه العلاقات في المعادلة ( ٧ - ١ ) نحصل على  
الطريقة المباشرة لحساب معامل الارتباط كالآتي :

أ - الطريقة المباشرة :

يمكن التوصل إلى معامل الارتباط بطريقة مباشرة باستخدام القيم  
الأصلية للظاهرتين ( س ، ص ) كما يلي :

$$r = \frac{\sum (ص - \text{مجد } ص) (س - \text{مجد } س)}{\sqrt{[\sum (ص - \text{مجد } ص)^2] [\sum (س - \text{مجد } س)^2]}} \quad (٧ - ٢)$$

حيث (ن) تمثل عدد أزواج القيم .

ب - طريقة الانحرافات البسيطة :

باستخدام الخاصية الأولى نحصل على الانحرافات البسيطة  
حس = س - أ ، حص = ص - ب ونستخدم العلاقة :

$$r = \frac{\sum (حص - \text{مجد } حص) (حس - \text{مجد } حس)}{\sqrt{[\sum (حص - \text{مجد } حص)^2] [\sum (حس - \text{مجد } حس)^2]}} \quad (٧ - ٣)$$

ج - باستخدام الانحرافات المختزلة :

باستخدام الخاصية الثانية نحصل على الانحرافات المختزلة ح'س ،  
ح'ص لقيم الظاهرتين ونستخدم العلاقة .

$$r = \frac{\sum (ح'ص - \text{مجد } ح'ص) (ح'س - \text{مجد } ح'س)}{\sqrt{[\sum (ح'ص - \text{مجد } ح'ص)^2] [\sum (ح'س - \text{مجد } ح'س)^2]}} \quad (٧ - ٤)$$

أمثلة :

مثال ( ٧ - ١ ) : احسب معامل الارتباط بين الظاهرتين (س ، ص ) :

س	١	٥	٩	١٣	١٧
ص	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠

الحل :

الطريقة المباشرة :

س	ص	س ص	س <sup>٢</sup>	ص <sup>٢</sup>
١	١٠	١٠	١	١٠٠
٥	١٥	٧٥	٢٥	٢٢٥
٩	٢٠	١٨٠	٨١	٤٠٠
١٣	٢٥	٣٢٥	١٦٩	٦٢٥
١٧	٣٠	٥١٠	٢٨٩	١٠٠
٤٥	١٠٠	١١٠٠	٥٦٥	٢٢٥٠

عدد أزواج القيم (ن) = ٥

ن مجد س ص - (مجد س) (مجد ص)

$$r = \frac{[ \text{ن مجد س}^2 - (\text{مجد س})^2 ] [ \text{ن مجد ص}^2 - (\text{مجد ص})^2 ]}{\sqrt{[ \text{ن مجد س}^2 - (\text{مجد س})^2 ] [ \text{ن مجد ص}^2 - (\text{مجد ص})^2 ]}}$$

$$= \frac{(100)(45) - 1100 \times 5}{\sqrt{[ (100)^2 - 2250 \times 5 ] [ (45)^2 - 565 \times 5 ]}}$$

$$r = \frac{4500 - 5500}{\sqrt{(10000 - 11250)(2025 - 2825)}} \sqrt{\frac{1000}{10000}} = \frac{1000}{10000} \sqrt{\frac{1000}{1250 \times 800}} =$$

∴  $r = 1$  أي أن الارتباط طردي وتام

حل آخر :

باستخدام الانحرافات البسيطة :

في هذه الحالة نبحث عن وسط فرضي لكل من قيم (س، ص). وفي هذه الحالة يراعى أن يكون الوسط الفرضي قريباً من متوسط القيم وذلك حتى يكون مجموع الانحرافات عنه أقل ما يمكن وذلك لتسهيل العمليات الجبرية وفي هذا المثال نأخذ الوسط الفرضي لقيم س = ٩ والوسط الفرضي لقيم ص = ٢٠

س	ص	ح س = س - ٩	ح ص = ص - ٢٠	ح س ح ص	ح <sup>٢</sup> س	ح <sup>٢</sup> ص
١	١٠	- ٨	- ١٠	٨٠	٦٤	١٠٠
٥	١٥	- ٤	- ٥	٢٠	١٦	٢٥
٩	٢٠	صفر	صفر	صفر	ظفر	صفر
١٣	٢٥	٤	٥	٢٠	١٦	٢٥
١٧	٣٠	٨	١٠	٨٠	٦٤	١٠٠
		صفر	صفر	٢٠٠	١٦٠	٢٥٠

$$r = \frac{\sqrt{\frac{[N \text{ مـج حـ ص} - (\text{مـج حـ ص})^2]}{[N \text{ مـج حـ ص}^2 - (\text{مـج حـ ص})^2]} \cdot \frac{[N \text{ مـج حـ ص}^2 - (\text{مـج حـ ص})^2]}{[N \text{ مـج حـ ص}^2 - (\text{مـج حـ ص})^2]}}{\sqrt{\frac{1000}{1250 \times 800}}} = \frac{\sqrt{\frac{200 \times 5 - \text{صفر}}{[250 \times 5 - \text{صفر}]}}}{\sqrt{\frac{1000}{1250 \times 800}}} =$$

$$r = \frac{1000}{1000} = 1$$

وهي نفس النتيجة السابقة

ملاحظة :

يستطيع القارئ أن يصل إلى نفس النتيجة باستخدام طريقة الانحرافات المختزلة في هذا المثال حيث يمكن الحصول على الانحرافات المختزلة لقيم (س) بقسمة الانحرافات البسيطة لها على ٤ وكذلك الحصول على الانحرافات المختزلة لقيم (ص) بقسمة الانحرافات البسيطة لها على ٥ .

مثال (٧ - ٢) :

احسب معامل الارتباط بين الظاهرتين (س، ص) :

س	٣	٥	٧	٩	١١
ص	٣٠	٢٥	٢٠	١٥	١٠

الحل :

ص <sup>٢</sup>	س <sup>٢</sup>	س ص	ص	س
٩٠٠	٩	٩٠	٣٠	٣
٦٢٥	٢٥	١٢٥	٢٥	٥
٤٠٠	٤٩	١٤٠	٢٠	٧
٢٢٥	٨١	١٣٥	١٥	٩
١٠٠	١٢١	١١٠	١٠	١١
٢٢٥٠	٢٨٥	٦٠٠	١٠٠	٣٥

$$r = \frac{\text{ن مجد س ص} - (\text{مجد س})(\text{مجد ص})}{\sqrt{[\text{ن مجد س}^2 - (\text{مجد س})^2][\text{ن مجد ص}^2 - (\text{مجد ص})^2]}}$$

$$= \frac{(100)(35) - 600 \times 5}{\sqrt{[100^2 - 2250 \times 5][35^2 - 285 \times 5]}}$$

$$= \frac{500 - 3000}{\sqrt{(10000 - 11250)(1225 - 1425)}} =$$

$$= \frac{500 - 3000}{\sqrt{250000}}$$

$$= \frac{500 - 3000}{500} = -1 \therefore r = -1$$

∴ الارتباط عكس وتام .



مثال ( ٧ - ٣ ) :

احسب معامل الارتباط بين عمر الزوج (س) وعمر الزوجة (ص)

س	٢٣	٢٧	٢٨	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٣	٣٥	٣٦
ص	١٨	٢٠	٢٢	٢٧	٢١	٢٩	٢٧	٢٩	٢٨	٢٩

الحل :

باستخدام طريقة الانحرافات البسيطة بافتراض :

وسط فرضي لقيم س = ٣٣

وسط فرضي لقيم ص = ٢٧

ص	ص	ح.س = س - ٣٣	ح.ص = ص - ٢٧	ح.ح.ص	ح.ح.س	ح.ح.ص
٣٣	١٨	صفر	- ٩	صفر	٨١	صفر
٢٧	٢٠	- ٦	- ٧	٤٢	٤٩	٣٦
٢٨	٢٢	- ٥	- ٥	٢٥	٢٥	٢٥
٢٨	٢٧	- ٥	صفر	صفر	صفر	٢٥
٢٩	٢١	- ٤	- ٦	٢٤	٣٦	١٦
٣٠	٢٩	- ٣	٢	- ٦	٤	٩
٣١	٢٧	- ٢	صفر	صفر	صفر	٤
٣٣	٢٩	صفر	٢	صفر	٤	صفر
٣٥	٢٨	٢	١	٢	١	٤
٣٦	٢٩	٣	٢	٦	٤	٩
		- ٢٠	- ٢٠	٩٣	٢٠٤	١٢٨

ن = عدد القيم = ١٠

$$r = \frac{\frac{n \text{ مجح ح ص} - (\text{مجح ح ص})}{[n \text{ مجح ح ص}^2 - (\text{مجح ح ص})^2]}}{\sqrt{\frac{[n \text{ مجح ح ص}^2 - (\text{مجح ح ص})^2]}{[n \text{ مجح ح ص}^2 - (\text{مجح ح ص})^2]}}}$$

$$= \frac{\frac{(20-)(20-)-93 \times 10}{[(400)-(20 \times 10)] [(400)-(128 \times 10)]}}{\sqrt{\frac{[(400)-(20 \times 10)] [(400)-(128 \times 10)]}{[(400)-(20 \times 10)] [(400)-(128 \times 10)]}}}$$

$$= \frac{\frac{400-930}{(400-20 \times 10)(400-1280)}}{\sqrt{\frac{(400-20 \times 10)(400-1280)}{(400-20 \times 10)(400-1280)}}}$$

$$= \frac{\frac{530}{1640 \times 880}}{\sqrt{\frac{1640 \times 880}{1640 \times 880}}}$$

$$= \frac{530}{1201,33} = \frac{530}{1443200} \sqrt{\frac{1443200}{1443200}} = ,44$$

∴ الارتباط طردي وضعيف

## ارتباط الرتب Rank Correlation

« معامل ارتباط سبيرمان »

تمتاز هذه الطريقة عن طريقة بيرسون بالسهولة في الحساب بالإضافة إلى إمكانية استخدامها في حالة الظواهر الوصفية . وتعتمد هذه الطريقة على الترتيب التصاعدي أو التنازلي لقيم الظاهرتين وتتلخص خطوات هذه الطريقة فيما يلي :

١ - نضع القيم الخاصة بكل من الظاهرتين (س ، ص) في العمودين الأول والثاني .

٢ - نوجد قيم رتب الظاهرتين (س، ص) اما ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً في عمودين ثالث ورابع .

وتعتمد هذه الطريقة على أن القيم المتساوية يلزم أن تكون لها رتب متساوية ، وعليه إذا تكررت قيمة من القيم أكثر من مرة يجب أن تعطى الرتبة التي تعادل متوسط ما كان يمكن أن تكون عليه هذه الرتب .

٣ - نحسب الفروق بين ترتيبي كل قيمتين متناظرتين للظاهرتين (س، ص) في عمود خامس ويرمز له بالرمز (ف) أي أن :

$$ف = رتب س - رتب ص$$

٤ - نحسب مربعات هذه الفروق (ف<sup>٢</sup>) في عمود سادس .

٥ - ثم نطبق العلاقة التالية لحساب معامل ارتباط الرتب .

$$r = 1 - \frac{6 \sum f^2}{n(n^2 - 1)} \quad (٥ - ٧)$$

ملاحظة :

يمكن التوصل إلى العلاقة في (٥ - ٧) من العلاقة الخاصة بمعامل

ارتباط بيرسون في (٧ - ١) إذا افترضنا أن كلا من الظاهرتين (س ، ص ) تأخذ القيم التالية بترتيب معين .

$$\begin{aligned} & ١ ، ٢ ، ٣ ، \dots ، ن \\ & \frac{١ + ن}{٢} = \overline{ص} = \overline{س} \\ & \frac{١ - ن^٢}{١٢} = ع^٢ = ع^٢ \end{aligned}$$

وبافتراض أن  $ف = س - ص$  فإن مجموع مربعات الفروق  
مجد  $ف^٢ = مجد (س - ص)^٢$

وحيث أن  $\overline{س} = \overline{ص}$  فإن بسط العلاقة (٧ - ١) يؤول إلى :

$$\frac{مجد ف^٢}{٢} - \frac{ن(ن-١)}{١٢} = (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$$

وبالتعويض في (٧ - ١) يمكن أن نحصل على العلاقة (٧ - ٥) .

مثال (٧ - ٤) :

احسب معامل ارتباط الرتب لقيم الظاهرتين (س، ص) في مثال

(٦ - ١)

الحل :

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف <sup>٢</sup>
١	١٠	١	١	٠	٠
٥	١٥	٢	٢	٠	٠
٩	٢٠	٣	٣	٠	٠
١٣	٢٥	٤	٤	٠	٠
١٧	٣٠	٥	٥	٠	٠
				صفر	

$$r = 1 - \frac{6 \text{ مبدف } 2}{n(n-1)} = 1 - \frac{6}{1(1-2)} = 1 - \frac{6}{-1} = 1 + 6 = 7$$

∴ الارتباط طردي وتام

كذلك يستطيع القارئ بسهولة أن يثبت أن معامل ارتباط الرتب في مثال (٦-٢) هو (٧ = ١ - ٦) وهي نفس النتائج التي حصلنا عليها بطريقة بيرسون .

مثال (٧-٥) :

احسب معامل سبيرمان لقيم الظاهرتين (س، ص) في مثال (٧-٣).

الحل :

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف <sup>٢</sup>
٣٣	١٨	٧,٥	١	٦,٥	٤٢,٥
٢٧	٢٠	١	٢	١ -	١
٢٨	٢٢	٢,٥	٤	١,٥ -	٢,٢٥
٢٨	٢٧	٢,٥	٥,٥	٣ -	٩
٢٩	٢١	٤	٣	١	١
٣٠	٢٩	٥	٩	٤ -	١٦
٣١	٢٧	٦	٥,٥	,٥	,٢٥
٣٣	٢٩	٧,٥	٩	١,٥ -	٢,٢٥
٣٥	٢٨	٩	٧	٢	٤
٣٦	٢٩	١٠	٩	١	١
					٧٩,٠٠

ن = عدد أزواج القيم = ١٠

$$r = 1 - \frac{6 \text{ مجف}^2}{n(n-1)}$$

$$= 1 - \frac{79 \times 6}{99 \times 10} = \frac{474}{990}$$

$$= 0.52$$

نلاحظ من الأمثلة السابقة أنه لا يلزم أن تتساوى طريقتنا بيرسون ومبيرمان لنفس البيانات ولكننا حصلنا على نفس النتيجة في حالة الارتباط التام سواء كان عكسياً أو طردياً .

وفي المثال التالي نوضح امكانية استخدام طريقة سبيرمان في حالة الظواهر الوصفية .

مثال (٧-٦) :

احسب معامل ارتباط الرتب لتقديرات عشرة من الطلبة في مادتي المحاسبة (ص) والإدارة العامة (ص) .

س	جيد	مقبول	جيد جداً	راسب	جيد	مقبول	ممتاز	مقبول	راسب	مقبول
ص	راسب	مقبول	ممتاز	مقبول	جيد	جيد جداً	جيد	جيد	راسب	جيد جداً

الحل :

نقوم بإيجاد رتب التقديرات تنازلياً .

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف <sup>٢</sup>
جيد	راسب	٣,٥	٩,٥	-٦	٣٦
مقبول	مقبول	٦,٥	٧,٥	-١	١
جيد جداً	ممتاز	٢	١	١	١
راسب	مقبول	٩,٥	٧,٥	٢	٤
جيد	جيد	٣,٥	٥	-١,٥	٢,٢٥
مقبول	جيد جداً	٦,٥	٢,٥	٤	١٦
ممتاز	جيد	١	٥	-٤	١٦
مقبول	راسب	٦,٥	٩,٥	-٣	٩
راسب	جيد	٩,٥	٥	٤,٥	٢٠,٢٥
مقبول	جيد جداً	٦,٥	٢,٥	٤,٥	١٦
					١٢١,٥

$$١٠ = ن$$

$$٦ \text{ مجف}^٢ - ١ = \frac{ن^٣ - ن}{٦}$$

$$- ١ = \frac{١٢١,٥ \times ٦}{١٠ - ١٠٠٠}$$

$$- ١ = \frac{٧٢٩}{٩٩٠} = ٧٣٦ - ١$$

$$= ٢٦٤,$$

∴ الارتباط طردي وضعيف جداً بين تقديرات الطلبة في المادتين .

ثانياً : معامل الارتباط الخطي للبيانات المبوبة :

لحساب معامل الارتباط من الجدول التكراري المزدوج والذي سبق  
تكوينه من جدول ( ٢ - ٢٠ ) نستخدم إحدى الطرق الآتية :

أ - الطريقة المباشرة :

$$r = \frac{\text{مجدك مجدس ص ك} - (\text{مجدس ك})(\text{مجد ص ك})}{\sqrt{[\text{مجدك مجدس ص}^2 \text{ ك} - (\text{مجدس ك})^2][\text{مجد ص ك}^2 \text{ ك} - (\text{مجد ص ك})^2]}}$$

( ٦ - ٧ )

حيث : س ترمز إلى مراكز فئات المتغير س  
ص ترمز إلى مراكز فئات المتغير ص  
مجدك ترمز إلى مجموع التكرارات

ويمكن التوصل إلى جميع المجاهيل اللازمة لحساب معامل الارتباط  
باستخدام العلاقة ( ٦ - ٧ ) عن طريق أحد الأسلوبين التاليين :

١ - الأسلوب الأول :

ويمثل في استخدام الجداول الثلاثة التالية :

— الجدول الأول الذي يمثل التوزيع الهامشي للمتغير (س) ونحسب  
فيه مجدس ك ، مجد ص<sup>٢</sup> ك .

— الجدول الثاني الذي يمثل التوزيع الهامشي للمتغير (ص) ونحسب  
فيه مجد ص ك ، مجد ص<sup>٢</sup> ك .

— الجدول الثالث وهو يمثل الجدول المزدوج الأصلي وباستخدام  
مراكز فئات (س ، ص) مع التكرارات التفصيلية بالجدول نحسب  
مجدس ص ك .



١ - الأسلوب الثاني : ويتضمن جدولاً واحداً يشمل الجداول الثلاثة السابقة .

ب - طريقة الانحرافات البسيطة :

$$r = \frac{\text{مجدك مجح ح ص ك} - (\text{مجد ح ص ك}) (\text{مجد ح ص ك})}{\sqrt{[\text{مجدك مجح ح ص ك} - (\text{مجد ح ص ك})^2] [\text{مجدك مجح ح ص ك} - (\text{مجد ح ص ك})^2]}} \quad (7-7)$$

حيث :

ح ص = س - أ      هي الانحرافات البسيطة للمتغير (س)  
 ح ص = ص - ب      هي الانحرافات البسيطة للمتغير (ص)  
 أ ، ب      مقادير ثابتة

ج - طريقة الانحرافات المختصرة :

$$r = \frac{\text{مجدك مجح ح ص ك} - (\text{مجد ح ص ك}) (\text{مجد ح ص ك})}{\sqrt{[\text{مجدك مجح ح ص ك} - (\text{مجد ح ص ك})^2] [\text{مجدك مجح ح ص ك} - (\text{مجد ح ص ك})^2]}} \quad (8-7)$$

حيث :

ح ص = ح ص + ث<sub>١</sub>      هي الانحرافات المختصرة للمتغير (س)  
 ح ص = ح ص + ث<sub>٢</sub>      هي الانحرافات المختصرة للمتغير (ص)

ويفضل استخدام هذه الطريقة في حالة تساوي فئات التوزيعات الهامشية للمتغيرين (س، ص).

مثال (٧ - ٧) :

احسب معامل الارتباط الخطي للجدول المزدوج الذي يوضح العلاقة بين المتغيرين (س، ص).

ص / س	٢٠ -	٢٢ -	٢٤ -	٢٦ -	٢٨ - ٣٠	المجموع
١٠ -	١٥	١٣	٨			٣٦
١٥ -		٨	٢٠	٩		٣٧
٢٠ - ٢٥			٥	١٢	١٠	٢٧
المجموع	١٥	٢١	٣٣	٢١	١٠	١٠٠

الحل : ١ - التوزيع الهامشي للمتغير (س)

فئات س	ك	مركز الفئة س	ح س = ٢٥ - ح س	ح س / ح س = $\frac{ح س}{٢}$	ح س / ك	ح س / ك
٢٠ -	١٥	٢١	٤ -	٢ -	٣٠ -	٦٠
٢٢ -	٢١	٢٣	٢ -	١ -	٢١ -	٢١
٢٤ -	٣٣	٢٥	صفر	صفر	صفر	صفر
٢٦ -	٢١	٢٧	٢	١	٢١	٢١
٢٨ - ٣٠	١٠	٢٩	٤	٢	٢٠	٤٠
المجموع	١٠٠				١٠ -	١٤٢

٢ - التوزيع الهامشي للمتغير (ص)

فئات ص	ك	ص	ح ص = ١٧,٥ - ح ص	ح ص / ح ص = $\frac{ح ص}{٥}$	ح ص / ك	ح ص / ك
١٠ -	٣٦	١٢,٥	٥ -	١ -	٣٦ -	٣٦
١٥ -	٣٧	١٧,٥	صفر	صفر	صفر	صفر
٢٠ - ٢٥	٢٧	٢٢,٥	٥	١	٢٧	٢٧
المجموع	١٠٠				٩ -	٦٣

ح/س ٢- ١- صفر ١ ٢

اس/ص	ص	س	-٢٠	-٢٢	-٢٤	-٢٦	٢٨-٣٠	المجموع
١-	-١٠	١٥	٣٠	١٣	٨	صفر		٤٣
٢-	-١٥		٨	صفر	٢٠	صفر	٣٧	صفر
٣-	١٥-٢٠			٥	صفر	١٢	١٠	٣٢
		١٥	٣٠	٢١	٣٣	٢١	١٠	٧٥

$$ر = \sqrt{\text{مجموع } \text{اس/ح} \text{ اس/ك} - (\text{مجموع } \text{اس/ك}) (\text{مجموع } \text{اس/ح})} \\ = \sqrt{[\text{مجموع } \text{اس}^2 \text{ ك} - (\text{مجموع } \text{اس/ك})^2] [\text{مجموع } \text{اس}^2 \text{ ح} - (\text{مجموع } \text{اس/ح})^2]}$$

$$= \sqrt{(9-)(10-)+70 \times 100} \\ = \sqrt{[81-63 \times 100] [100-142 \times 100]}$$

$$= \sqrt{90-7000} \\ = \sqrt{7219 \times 14100} \\ = \frac{7410}{9364,18}$$

$$ر = 79,$$

∴ الارتباط طردي وقوي بين س ، ص



## الارتباط بين الظواهر الوصفية

لاحظنا مما سبق أنه يمكن استخدام معامل ارتباط الرتب في حالة البيانات الوصفية غير المبوبة . أما إذا كان لدينا جداول مبوبة لظاهرتين وصفيتين أو جداول مبوبة لظاهرتين أحدهما وصفية والأخرى كمية فإنه يمكننا دراسة الارتباط فيما بينها باستخدام معاملات خاصة لها نفس خصائص معامل الارتباط في حالة الظواهر الكمية مثل معامل التوافق ومعامل الاقتران .

أ - معامل التوافق Contingency Coefficient :

إذا كان لدينا صفتان وكل صفة مقسمة إلى عدة أقسام ولقياس العلاقة بين هاتين الصفتين نسحب عينة مكونة من عدد (ن) من المفردات ونسجل مشاهداتنا في الجدول المزدوج التالي بافتراض أن الصفة الأولى تنقسم إلى عدد (ل) من الأقسام والصفة الثانية تنقسم إلى عدد (م) من الأقسام ، ويسمى بجدول التوافق Contingency Table .

جدول توافق لصفتين

المجموع	ب <sub>م</sub>	....	ب <sub>٢</sub>	ب <sub>١</sub>	الصفة الثانية ب الصفة الأولى أ
ن <sub>١</sub>	ك <sub>١م</sub>	....	ك <sub>٢١</sub>	ك <sub>١١</sub>	أ <sub>١</sub>
ن <sub>٢</sub>	ك <sub>٢م</sub>	....	ك <sub>٢٢</sub>	ك <sub>١٢</sub>	أ <sub>٢</sub>
⋮					⋮
ن <sub>ل</sub>	ك <sub>لم</sub>		ك <sub>٢ل</sub>	ك <sub>١ل</sub>	أ <sub>ل</sub>
ن	ن <sub>م</sub>	....	ن <sub>٢</sub>	ن <sub>١</sub>	المجموع

حيث : ن<sub>١</sub> ، ن<sub>٢</sub> ، ... ، ن<sub>م</sub> هي المجاميع الهامشية للصفة (ب)  
ن<sub>١</sub> ، ن<sub>٢</sub> ، ... ، ن<sub>ن</sub> هي المجاميع الهامشية للصفة (أ)

وهناك مقاييس مختلفة لمعامل التوافق سوف نستخدم منها الصورة التالية :

$$\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} \quad (٧ - ٩)$$

حيث :

ن حجم العينة

χ<sup>٢</sup> متغير احصائي له توزيع يعرف باسم χ<sup>٢</sup> Chi-Square (مربع كاي)  
ويمكن حسابها كالاتي :

$$\chi^2 = \frac{\text{مجد (ك - ت)}}{ت}$$

حيث : ك التكرار المشترك المشاهد في كل خلية

ت التكرار المتوقع لكل خلية ويحسب من العلاقة

$$ت = \frac{ن_{ر.} \times ن_{د.}}{ن} \quad \text{لجميع قيم } ر = ١, ٢, \dots, م \quad و = ١, ٢, \dots, ل$$

والفكرة الأساسية في هذا المعامل هي أنه كلما بعد الفرق بين التكرارات المشاهدة (ك) والمتوقعة (ت) نتيجة لوجود علاقة بين الظاهرتين كلما كبرت قيمة χ<sup>٢</sup> وبالتالي تزيد قيمة معامل التوافق . وكلما كان الفرق محدوداً بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة نتيجة لضعف اعتماد أي من الظاهرتين على الأخرى كلما قلت قيمة χ<sup>٢</sup> وبالتالي تقل قيمة معامل التوافق . وتكون الظاهرتان مستقلتين تماماً عندما تكون χ<sup>٢</sup> = صفر .

مثال (٧-٨) :

الجدول التالي يلخص دراسة على ٥٠ مفردة لقياس العلاقة بين مستوى التعليم والتدخين . والمطلوب حساب معامل التوافق .

تدخين / تعليم	جامعي	متوسط	غير متعلم	المجموع
نعم	١٠	٥	٥	٢٠
لا	١٣	٧	١٠	٣٠
المجموع	٢٣	١٢	١٥	٥٠

الحل :

ك	ت	$\frac{\chi^2 (ك - ت)}{ت} = \chi^2_{كا}$
١٠	٩,٢	,٠٦٩
٥	٤,٨	,٠٠٨
٥	٢,٠	٤,٥٠٠
١٣	١٣,٨	,٠٤٦
٧	٧,٢	,٠٠٥
١٠	٦,٠	٢,٦٦٧
		٧,٢٩٥

$$\frac{\sqrt{7,295}}{\sqrt{57,295}} = \frac{\chi^2_{كا}}{\chi^2_{كا} + ن} = \text{معامل التوافق} = ,307$$

∴ الارتباط ضعيف بين التعليم والتدخين .

## ملاحظات :

١ - معامل التوافق دائماً كمية موجبة لأن  $\kappa^2 \leq \text{صفر}$  . ومن ثم فهو يعطي مقياساً لقوة العلاقة بين الظاهرتين ولا يعطي مؤشراً على نوع العلاقة بينهما سواء كانت طردية أو عكسية .

٢ - معامل التوافق قيمة محصورة بين الصفر وقيمة عظمى أقل من الواحد الصحيح قيمتها تعتمد على حجم الجدول المزدوج ، فإذا كان الجدول مكوناً من ( ج ) صف وكذلك ( ج ) عمود فإن أكبر قيمة ممكنة لمعامل التوافق هي :

$$Q = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{J}}}{J}$$

وخلاف ذلك فإن أكبر قيمة ممكنة لمعامل التوافق تساوي :

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{N(1 - K)}{N + N(1 - K)}}}{N}$$

حيث (ن) هو العدد الكلي للتكرارات في الجدول ، ك هي إما عدد الصفوف أو عدد الأعمدة أيهما أصغر .

٣ - لمعرفة قوة الارتباط ينسب معامل التوافق المحسوب إلى ( ق ) .

٤ - يستخدم هذا المقياس كثيراً في الدراسات الاجتماعية والتربوية والنفسية وكذلك الدراسات التي تقاس متغيراتها وصفيًا .

## ب - معامل الاقتران :

إذا كان المطلوب هو دراسة الارتباط بين ظاهرتين وصفيتين في حالة كون التقسيم الرأسي والأفقي لهما هو تقسيم ثنائي ( أي جدول  $2 \times 2$  ) أي حالة خاصة من جدول التوافق السابق ، كما يلخصه الجدول التالي :



الظاهرة		الظاهرة
ص	ج	
د	ب	س

ويمكن حساب معامل الاقتران أو ما يسمى معامل Yule باستخدام العلاقة :

$$(١٠-٧) \quad \text{معامل الاقتران} = \frac{ا \times د - ب \times ج}{ا \times د + ب \times ج}$$

مثال (٧-٩) :

الجدول التالي يلخص دراسة لقياس العلاقة بين التطعيم ضد مرض الجدري والإصابة بهذا المرض . والمطلوب حساب معامل الاقتران .

الحل :

نعم	لا	التطعيم الإصابة
		لا
٣٠٠ (ج)	٣٠٠ (أ)	
٩٠٠ (د)	٣٥٠ (ب)	نعم

$$\text{معامل الاقتران} = \frac{ا \times د - ب \times ج}{ا \times د + ب \times ج}$$

$$,٤٤ = \frac{٣٥٠ \times ٣٠٠ - ٩٠٠ \times ٣٠٠}{٣٥٠ \times ٣٠٠ + ٩٠٠ \times ٣٠٠} =$$

وهذا يعني أن العلاقة بين التطعيم ضد مرض الجدري والإصابة به علاقة طردية وضعيفة .

## معامل الارتباط المتعدد

سبق وأن اقتصرنا دراستنا للارتباط على ظاهرتين فقط ولكن في الحياة العملية كثيراً ما توجد علاقة بين أكثر من ظاهرتين ونرغب في قياس الارتباط بينهم كما هو الحال في كثير من المشاكل الاقتصادية والنفسية والاجتماعية فمثلاً قيمة المبيعات من سلعة معينة يتوقف على أسلوب الاعلان عنها وعلى قدرة وأسلوب البائع وطريقة عرضها وكذلك كمية الانتاج من منتج معين يتوقف على مهارة العاملين ومستوى تدريبهم وعلى المستوى التكنولوجي المستخدم ورأس المال المستثمر والوقت المتاحة .

وسوف نقتصر في تحليلنا على ثلاث ظواهر (متغيرات) هي : (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub>) ، بافتراض أن هناك علاقة خطية بينها بمعنى أنه يمكن حساب معامل الارتباط البسيط بين كل زوج من هذه الظواهر أي أن : (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub> ، س<sub>٢</sub>) هي معاملات الارتباط الخطية البسيطة بين الظواهر (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub>) ، (س<sub>١</sub> ، س<sub>٣</sub>) ، (س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub>) على الترتيب . ومن ثم يمكن حساب معامل الارتباط المتعدد (الكلي) بين الظاهرة (س<sub>١</sub>) والظاهرتين (س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub>) وهو الجذر التربيعي الموجب للمقدار .

$$r_{(٢٣)١} = \frac{r_{٢١}r_{٣١} + r_{٢٣}r_{١٣} - r_{٢٣}^2}{1 - r_{٢٣}^2} \quad (٧ - ١١)$$

ملاحظات :

- ١ - معامل الارتباط المتعدد موجب القيمة دائماً (١ ≤ r<sub>(٢٣)١</sub> ≤ صفر) .
- ٢ - معامل الارتباط المتعدد يكون أكبر دائماً من جميع معاملات الارتباط الجزئية بين أزواج الظواهر الداخلة في حسابه نظراً لأن تقدير الارتباط بين الظواهر الثلاث يكون أفضل باستخدام معلومات أكثر عما هو الحال عند تقدير الارتباط بين أزواج الظواهر .
- ٣ - يمكن الحصول على معامل الارتباط المتعدد بمعلومية الخطأ المعياري لتقدير كما سيتضح في الفصل الثامن .

## معامل الارتباط الجزئي Partial Correlation Coefficient

إذا كنا نهدف إلى دراسة الارتباط في هذه الحالة بين ظاهرتين فقط مع استبعاد أثر الظاهرة الثالثة نستخدم ما يسمى معامل الارتباط الجزئي . فمثلاً إذا أردنا قياس الارتباط بين الظاهرتين (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub>) مع تثبيت الظاهرة (س<sub>٣</sub>) نحسب معامل الارتباط الجزئي (س<sub>١٢</sub> س<sub>٣</sub>) من العلاقة :

$$(١٢-٧) \quad \frac{٣٢,٢١٥ - ٢١,٥}{\sqrt{(٣٢,٢ - ١)(٣١,٥ - ١)}} = ٣٠,٢١٥$$

وهكذا إذا أردنا دراسة العلاقة بين الظاهرتين (س<sub>١</sub> ، س<sub>٣</sub>) مع تثبيت الظاهرة (س<sub>٢</sub>) نحسب معامل الارتباط الجزئي (س<sub>١٣</sub> س<sub>٢</sub>) من العلاقة :

$$(١٣-٧) \quad \frac{٣٢,٢١٥ - ٣١,٥}{\sqrt{(٣٢,٢ - ١)(٢١,٥ - ١)}} = ٢٠,٣١٥$$

وبصورة عامة فإن معامل الارتباط الجزئي يدرس العلاقة بين المتغير التابع وأحد المتغيرات المستقلة مع ثبات المتغيرات المستقلة الأخرى . ويجب الإشارة هنا إلى صعوبة استخدام هذا المقياس في بعض الحالات التي يصعب فيها تثبيت بعض المتغيرات المستقلة نظراً لطبيعة التشابك فيما بينها .

مثال (١٠-٧) :

من البيانات التالية عن المتغيرات س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub>

س <sub>١</sub>	١	٢	٣	٤	٥
س <sub>٢</sub>	٢	٣	٣	٥	٧
س <sub>٣</sub>	٢	٥	٧	٨	٨

أوجد :

- ١ - معامل ارتباط المتعدد بين ١ س وكل من ٢ س ، ٣ س .
- ٢ - معامل الارتباط الجزئي بين ١ س ، ٢ س مع تثبيت ٣ س .

الحل :

١ س	٢ س	٣ س	١ س <sup>٢</sup>	٢ س <sup>٢</sup>	٣ س <sup>٢</sup>	١ س ٢ س	١ س ٣ س	٢ س ٣ س
١	٢	٢	١	٤	٤	٢	٢	٤
٢	٣	٥	٤	٩	٢٥	٦	١٠	١٥
٣	٣	٧	٩	٩	٤٩	٩	٢١	٢١
٤	٥	٨	١٦	٢٥	٦٤	٢٠	٣٢	٤٠
٥	٧	٨	٢٥	٤٩	٦٤	٣٥	٤٠	٥٦
١٥	٢٠	٣٠	٥٥	٩٦	٢٠٦	٧٢	١٠٥	١٣٦

بافتراض (٢١ ، ٣١ ، ٣٢) هي معاملات الارتباط الخطية البسيطة بين المتغيرات (١ س ، ٢ س) ، (١ س ، ٣ س) ، (٢ س ، ٣ س) على الترتيب .

$$r_{12} = \frac{n \text{ مجد } ١ \text{ س } ٢ \text{ س} - (\text{مجد } ١ \text{ س})(\text{مجد } ٢ \text{ س})}{\sqrt{[n \text{ مجد } ١ \text{ س}^٢ - (\text{مجد } ١ \text{ س})^٢][n \text{ مجد } ٢ \text{ س}^٢ - (\text{مجد } ٢ \text{ س})^٢]}}$$

$$= \frac{٥(٧٢) - (٢٠)(١٥)}{\sqrt{(٤٠٠ - ٩٦ \times ٥)(٢٢٥ - ٥٥ \times ٥)}} = ٠,٩٥$$

$$r_{13} = \frac{n \text{ مجد } ١ \text{ س } ٣ \text{ س} - (\text{مجد } ١ \text{ س})(\text{مجد } ٣ \text{ س})}{\sqrt{[n \text{ مجد } ١ \text{ س}^٢ - (\text{مجد } ١ \text{ س})^٢][n \text{ مجد } ٣ \text{ س}^٢ - (\text{مجد } ٣ \text{ س})^٢]}}$$

$$\begin{aligned}
 ,93 &= \frac{30 \times 15 - 105 \times 5}{[900 - 206 \times 5] 50} \sqrt{\quad} \\
 &= \frac{\text{نجد س}^2 \text{ س}^2 - 3 \text{ (نجد س}^2 \text{ س}^2 \text{ (نجد س}^2 \text{ س}^2)}{[ \text{نجد س}^2 \text{ س}^2 - \text{نجد س}^2 \text{ س}^2 ] \text{نجد س}^2 \text{ س}^2} \sqrt{\quad} = 322 \\
 ,78 &= \frac{30 \times 20 - 136 \times 5}{130 \times 80} \sqrt{\quad} =
 \end{aligned}$$

١ - معامل الارتباط المتعدد بين (س١) وكل من (س٢ ، س٣)

$$\begin{aligned}
 \frac{r_{23}r_{12}r_{13} - r_{12}^2 - r_{13}^2}{r_{23}^2 - 1} &= r_{(23)1}^2 \\
 \frac{(,78)(,93)(,95) - ,93^2 - ,95^2}{,78^2 - 1} &= r_{(23)1}^2 \\
 ,99 &=
 \end{aligned}$$

∴ معامل الارتباط المتعدد = ,99 = ,99

أي أن الارتباط بين المتغيرات الثلاثة (س١ ، س٢ ، س٣) قوي جداً .

٢ - معامل الارتباط الجزئي بين المتغيرين (س١ ، س٢) مع تثبيت (س٣) .

$$\begin{aligned}
 \frac{r_{23}r_{13} - r_{12}r_{13}^2}{(r_{23}^2 - 1)(r_{13}^2 - 1)} \sqrt{\quad} &= r_{23.1} \\
 \frac{(,78)(,93) - ,95}{[ ,78^2 - 1 ][ ,93^2 - 1 ]} \sqrt{\quad} &= \\
 ,976 &=
 \end{aligned}$$

∴ الارتباط الجزئي بين س١ ، س٢ مع تثبيت أثر س٣ قوي جداً

وطردي .

## تمارين الفصل السابع

(١) ارسم الشكل الانتشاري ثم أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين (س، ص) من البيانات التالية :

س	٢	٤	٥	٧	٩	١٠	١٢	١٥	١٧	٢٠
ص	١	٣	٥	٥	٦	٨	٩	١١	١٢	١٥

(٢) من البيانات التالية التي توضح العلاقة بين المتغيرين (س، ص)

س	٥٠	٤٢	٥٧	٥٥	٤٤	٤٨	٥٣	٥٩
ص	٤٣	٤٤	٥٨	٥٩	٤١	٥٣	٥٢	٦٢

احسب : أ - معامل الارتباط الخطي البسيط لبيرون .

ب - معامل ارتباط الرتب لسبيرمان .

(٣) الآتي تقديرات ثمانية من الطلبة في مادتي الاحصاء (س) والاقتصاد (ص) .

س	ممتاز جيد	مقبول	ضعيف	جيد جداً	جيد	ممتاز	جيد
ص	جيد	ضعيف	جيد جداً	ضعيف	جيد	مقبول	جيد جداً

والمطلوب حساب معامل ارتباط الرتب .

(٤) فيما يلي درجات عشرة من الطلبة في مادتي المحاسبة (س) وإدارة الأعمال (ص).

س	١٨	١٢	١٦	١٥	١٠	٩	٦	١٢	١٥	١٧
ص	١١	٥	١٤	٨	٥	٧	٨	٨	١٣	١١

المطلوب :

حساب معامل ارتباط بيرسون وسبيرمان .

(٥) في دراسة للظاهرتين (س، ص) باستخدام بيانات عن ١٠ وحدات معاينة تبين أن  $\sum d = 4750$  وكذلك تبين ما يلي :

الظاهرة ص	الظاهرة س	
١٦	٣٠	الوسط الحسابي
٢	٥	الانحراف المعياري

احسب معامل الارتباط بين س ، ص

(٦) في دراسة للظاهرتين (س، ص) باستخدام بيانات عن ١٠ وحدات معاينة توافرت لديك المعلومات الآتية :

مجد ص = ٤٨٩٠	مجد س = ١٦٠
مجد ص = ٣٠٠	ع ص = ٥
ع ص = ٢	

والمطلوب حساب معامل الارتباط الخطي البسيط بين (س، ص) وفسر

معناه .

(٧) الجدول التالي يلخص توزيع عينة من ٤٠٠ طالباً بحسب نوع الدراسة والمستوى الاجتماعي .

نوع الدراسة الثانوية	المستوى الاجتماعي				المجموع
	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	
ثانوي عام	٢٥	٤٠	١٦	٤	٨٥
ثانوي صناعي	١٢	٧٥	١٠٨	١٥	٢١٠
ثانوي تجاري	٣	٣٢	٦٠	١٠	١٠٥
المجموع	٤٠	١٤٧	١٨٤	٢٩	٤٠٠

والمطلوب حساب معامل التوافق لقياس العلاقة بين نوع الدراسة والمستوى الاجتماعي .

(٨) الجدول التالي يبين توزيع الدخل السنوية بالدينار لعينة مكونة من ٢٠٠ فرد نصفهم من الرجال ونصفهم الآخر من النساء .

هل هناك علاقة بين الدخل السنوي والنوع؟

النوع		الدخل السنوي
أنثى	ذكر	
٨٥	٥٥	أقل من ٥٠٠ دينار
١٥	٤٥	٥٠٠٠ فأكثر

(٩) احسب معامل الارتباط بين العمر (س) لمجموعة من الأطفال وبين أوزانهم (ص) باستخدام الجدول المزدوج الآتي :



المجموع	١١-١٠	-٩	-٨	-٧	-٦	العمر س الوزن ص
١٠	-	٢	٥	٣	-	- ١٥
١٩	-	٥	٧	٤	٣	- ١٧
٤٠	٢	١٠	١٥	٨	٥	- ١٩
١١	-	١	٥	٣	٢	٢٣ - ٢١
٨٠	٢	١٨	٣٢	١٨	١٠	المجموع

(١٠) الجدول التالي يوضح العلاقة بين المتغيرين (س، ص)

المجموع	٢٥ - ٢٠	- ١٥	- ١٠	س ص
٢٠	٥	٥	١٠	- ٣
٤٥	١٥	٢٥	٥	- ٤
٣٥	٥	٢٥	٥	٦ - ٥
١٠٠	٢٥	٥٥	٢٠	المجموع

والمطلوب :

١ - حساب معامل الارتباط بين المتغيرين (س، ص).

٢ - إيجاد الوسيط لقيم (ص).

٣ - إيجاد المنوال لقيم (س).

(١١) إذا علمت أن المتغير س<sub>١</sub> يرمز إلى درجة النجاح في الاختبار

المتغير س<sub>٢</sub> يرمز إلى عدد ساعات المذاكرة اليومية

المتغير س<sub>٣</sub> يرمز إلى درجة الذكاء للطلاب

وإذا كانت معاملات الارتباط الخطية بين أزواج المتغيرات هي :

$$r_{12} = 0.60, r_{13} = 0.35, r_{23} = 0.25$$

احسب : ١ - معامل الارتباط المتعدد بين درجة النجاح في الاختبار وكل من درجة الذكاء وعدد ساعات المذاكرة اليومية .

٢ - معامل الارتباط الجزئي بين درجة النجاح ودرجة الذكاء مع استبعاد أثر عدد ساعات المذاكرة اليومية .

(١٢) من البيانات التالية عن المتغيرات (ص، س١، س٢)

ص	٦٤	٧١	٥٣	٦٧	٥٥	٥٨	٧٧	٥٧	٥٦	٥١
س١	٥٧	٥٩	٤٩	٦٢	٥١	٥٠	٥٥	٤٨	٥٢	٤٢
س٢	٨	١٠	٦	١١	٨	٧	١٠	٩	١٠	٦

والمطلوب :

١ - حساب معامل الارتباط المتعدد بين المتغير التابع (ص) والمتغيرين المستقلين (س١، س٢) .

٢ - حساب معامل الارتباط الجزئي بين (ص، س١) مع تثبيت (س٢) .

## الفصل الثامن الانحدار الخطي

### أولاً : الانحدار الخطي البسيط Simple Linear Regression

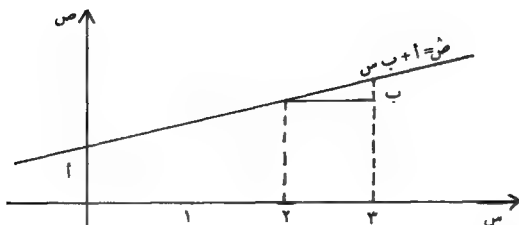
من دراستنا السابقة أمكننا تمثيل العلاقة بين المتغيرين (س، ص) بيانياً باستخدام أشكال الانتشار المختلفة وكذلك أمكن معرفة درجة واتجاه العلاقة الخطية بينهما .

وفي هذا الفصل سوف نركز على معرفة الصورة الرياضية للعلاقة الخطية البسيطة بين متغيرين وذلك بعد تحديد كل من المتغير التابع (Dependent Variable) والمتغير المستقل (Independent Variable) في النموذج الخطي البسيط .

معادلة انحدار (ص) على (س) :

إذا كانت هناك علاقة بين متغيرين (س ، ص ) بحيث أنه إذا تغير أحدهما أثر ذلك على قيمة المتغير الآخر . فإن أبسط العلاقات لتقريب العلاقة بين هذين المتغيرين هي العلاقة الخطية البسيطة . ويفرض أن (ص) هو المتغير التابع و(س) هو المتغير المستقل فإن الصورة العامة لخط انحدار (ص) على (س) هي :

$$\text{ص} = \text{أ} + \text{ب س} \quad (٨ - ١)$$



حيث تعرف (ب) على أنها معامل انحدار (ص) على (س) وتساوي معدل تغير (ص) عندما تتغير (س) بمقدار وحدة واحدة وتساوي كذلك معدل تغير (ص) منسوب إلى معدل تغير (س) و(ب) هي كذلك ظل الزاوية التي يصنعها خط انحدار (ص) على (س) مع الأفق (محور س).

أما (أ) فهي قيمة المتغير (ص) عندما تكون قيمة (س) صفراً أو الجزء الذي يقطعه خط انحدار (ص) على (س) من المحور الرأسي (محور ص).

يمكن تقدير قيمة كل من (أ ، ب) من خلال عينة من قيم المتغيرين (س) و(ص) وبالتالي نستطيع تقدير خط انحدار (ص) على (س) والذي يربط المتغير (ص) بالتغير في قيم (س) واستخدام هذه العلاقة في التنبؤ بقيم المتغير (ص) بدلالة قيم المتغير (س). ومن أهم طرق تقدير (أ ، ب) طريقة المربعات الصغرى (Least Square Method) وهي الطريقة التي يتم بموجبها تقدير (أ ، ب) وبالتالي تقدير خط انحدار (ص) على (س) بحيث يكون مجموع الفرق الناشئ بين القيم الفعلية للمتغير (ص) والقيم المقطرة (ص) باستخدام الخط المقدر لانحدار (ص) على (س) يساوي صفراً أو أن يكون مجموع مربعات هذه الفروق أقل ما يمكن لأي قيمة أخرى لكل من

(أ ، ب) . أي أنه بإيجاد مجـ (ص - ض) وحساب التفاضل الجزئي مرة بالنسبة لـ (أ) وأخرى بالنسبة لـ (ب) ومساواة المعادلتين بالصفر نحصل على المعادلتين الطبعيتين الآتيتين :

$$\text{مجـ ص} = \text{ن أ} + \text{ب مجـ س} \quad (٢-٨)$$

$$\text{مجـ س ص} = \text{أ مجـ س} + \text{ب مجـ س}^2 \quad (٣-٨)$$

ويحل هاتين المعادلتين جبرياً بالنسبة لـ (أ) و (ب) نحصل منهما على

$$\text{ب} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2} = \frac{\text{مجـ س ص} - \text{ن س ص}}{\text{مجـ س}^2 - \text{ن س ص}} \quad (٤-٨)$$

وبعد تحديد قيمة (ب) يمكن تحديد قيمة (أ) باستخدام المعادلة (٢-٨) والقسمة على (ن) فنحصل على :

$$\text{أ} = \text{ص} - \text{ب س} \quad (٥-٨)$$

$$\text{حيث ص} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} ، \text{س} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

وبالتعويض بعد ذلك عن قيمتي (أ ، ب) في المعادلة (١-٨) نحصل على معادلة انحدار (ص) على (س) .

ملاحظة :

هناك صور مختلفة لمعادلة انحدار (ص) على (س) نذكر منها على

سبل المثال :

١ - إذا أردنا كتابة المعادلة كعلاقة في مجهول واحد وذلك بالتعويض عن

(٥-٨) في (١-٨) فنحصل على معادلة انحدار (ص) على (س)

في الصورة :

$$\text{ص} - \text{ص} = \text{ب (س - س)} \quad (٦-٨)$$

حيث يمكن إيجاد معادلة انحدار (ص) على (س) بمعلومية معامل الانحدار والوسط الحسابي لكلتا الظاهرتين .

٢ - يمكن الحصول على معادلة انحدار (ص) على (س) بدلالة معامل الارتباط الذي سبق حسابه في الفصل السابق حيث يمكن إثبات صحة العلاقة .

$$ب = ر \frac{ع_ص}{ع_س} \quad (٧-٨)$$

حيث : ر معامل الارتباط

ع<sub>ص</sub> الانحراف المعياري لقيم ص  
ع<sub>س</sub> الانحراف المعياري لقيم س

وبالتعويض عن (٧-٨) في (٦-٨) فإن معادلة انحدار (ص) على (س) تؤول إلى :

$$ص - ص_س = ر \frac{ع_ص}{ع_س} (س - س_س) \quad (٨-٨)$$

معادلة انحدار (س) على (ص) :

في هذه الحالة بفرض أن (ص) هي المتغير المستقل ، (س) هي المتغير التابع له ويفترض أن العلاقة بينهما خطية مستقيمة فإنه يمكن التنبؤ بقيمة (س) إذا علمت قيمة (ص) باستخدام المعادلة :

$$س^١ = ج + د ص \quad (٩-٨)$$

ويمكن كما سبق تطبيق طريقة المربعات الصغرى لتحديد قيمة كل من (ج ، د) على النحو التالي :

$$د = \frac{ن مج ص ص - (مج ص) (مج ص)}{ن مج ص ص^٢ - (مج ص)^٢} \quad (١٠-٨)$$

$$\text{ج} = \bar{\text{س}} - \text{د} \quad (٨-١١)$$

ومن ثم نحصل على معادلة انحدار (س) على (ص) بالتعويض عن قيمتي (د ، ج) في المعادلة (٨-٩) .

أيضاً بالتعويض عن قيمة (ج) في (٨-١١) في المعادلة (٨-٩) فإن معادلة انحدار (س) على (ص) تؤول إلى :

$$\text{س} - \bar{\text{س}} = \text{د} (\text{ص} - \bar{\text{ص}}) \quad (٨-١٢)$$

وباستخدام العلاقة بين معاملي الارتباط والانحدار في هذه الحالة :

$$\text{د} = \text{ر} \frac{\bar{\text{ع}}_{\text{س}}}{\bar{\text{ع}}_{\text{ص}}} \quad (٨-١٣)$$

فإن معادلة انحدار (س) على (ص) في (٨-١٢) تؤول إلى :

$$\text{س} - \bar{\text{س}} = \bar{\text{س}} - \text{ر} \frac{\bar{\text{ع}}_{\text{س}}}{\bar{\text{ع}}_{\text{ص}}} (\text{ص} - \bar{\text{ص}}) \quad (٨-١٤)$$

مثال (٨-١) :

فيما يلي درجات عشرة من الطلبة في مادتي المحاسبة (س) والاقتصاد (ص) :

س	١١	٧	١٥	٩	٦	٨	٩	١٣	١٣
ص	١٩	١١	١٦	١٥	١٠	٨	٧	١٢	١٥

والمطلوب :

- ١ - ايجاد معادلة انحدار (ص) على (س) .
- ٢ - التنبؤ بقيمة ص عندما س = ١٠ .
- ٣ - ايجاد معادلة انحدار (س) على (ص) .

الحل :

س	ص	س ص	س <sup>٢</sup>	ص <sup>٢</sup>
١١	١٩	٢٠٩	١٢١	٣٦١
٧	١١	٧٧	٤٩	١٢١
١٥	١٦	٢٤٠	٢٢٥	٢٥٦
٩	١٥	١٣٥	٨١	٢٢٥
٦	١٠	٦٠	٣٦	١٠٠
٨	٨	٦٤	٦٤	٦٤
٩	٧	٦٣	٨١	٤٩
٩	١٢	١٠٨	٨١	١٤٤
١٣	١٥	١٩٥	١٦٩	٢٢٥
١٣	١٧	٢٢١	١٦٩	٢٨٩
١٠٠	١٣٠	١٣٧٢	١٠٧٦	١٨٣٤

معادلة انحدار (ص) على (س) هي :

$$\hat{ص} = أ + ب س$$

حيث

$$ب = \frac{ن \text{ مجد س ص} - (مجد س) (مجد ص)}{ن \text{ مجد س}^2 - (مجد س)^2}$$

$$= \frac{١٣٠ \times ١٠٠ - ١٣٧٢ \times ١٠}{١٠٠٠٠ - ١٠٧٦ \times ١٠}$$

$$ب = \frac{٧٢٠}{٧٦٠} = \frac{١٣٠٠٠ - ١٣٧٢٠}{١٠٠٠٠ - ١٠٧٦٠}$$



$$\therefore \text{ب} = ٠,٩٤٧٤$$

$$\therefore \text{أ} = \text{ص} - \text{ب} = \text{ص}$$

$$= \frac{١٠٠}{١٠} \times ٠,٩٤٧٤ - \frac{١٣٠}{١٠} =$$

$$= ١٠ \times ٠,٩٤٧٤ - ١٣ =$$

$$= ٣,٥٢٦٣ = ٩,٤٧٤ - ١٣ =$$

∴ معادلة انحدار (ص) على (س) هي :

$$\text{ص}^{\wedge} = ٠,٩٤٧٤ + ٣,٥٢٦٣ \text{ س}$$

وقيمة ص عندما س = ١٠ هي :

$$\text{ش} = ١٠ \times ٠,٩٤٧٤ + ٣,٥٢٦٣ = ١٣$$

٣ - ايجاد معادلة انحدار (س) على (ص)

$$\text{د} = \frac{\text{ن مجد ص ص} - (\text{مجد ص}) (\text{مجد ص})}{\text{ن مجد ص}^2 - (\text{مجد ص})^2} = \frac{٧٢٠}{١٤٤٠} = ٠,٥٠$$

$$\text{ج} = \text{ص} - \text{د ص}$$

$$= ١٠ - ١٣ \times ٠,٥٠ = ٣,٥$$

∴ معادلة انحدار (س) على (ص) هي :

$$\text{ش} = \text{ج} + \text{د ص}$$

$$\text{ش} = ٣,٥ + ٥ \text{ رص}$$

ملاحظات :

١ - يستطيع القارئ أن يصل إلى نفس النتيجة إذا استخدم طريقة

الانحرافات البسيطة وفي هذه الحالة فإن :

$$\text{ب} = \frac{\text{ن مجد ح ص} - (\text{مجد ح}) (\text{مجد ص})}{\text{ن مجد ح}^2 - (\text{مجد ح})^2}$$

حيث  $حس = ص - أ$  ،  $حص = ص - أ$

وأن  $أ$  ،  $أ$  أوساط فرضية لقيم الظاهرتين .

٢ - يمكن إيجاد معامل الارتباط بمعلومية معاملي الانحدار حيث نجد أنه بضرب المعادلتين  $(٧-٨)$  ،  $(١٣-٨)$  نحصل على :

$$\begin{aligned} ر ب &= ٢ د \\ \therefore ر &= \sqrt{\frac{ب د}{ب}} \end{aligned} \quad (١٥-٨)$$

٣ - من المعادلتين  $(٧-٨)$  ،  $(١٣-٨)$  يمكن بمعلومية معاملي الانحدار والانحراف المعياري لكل من المتغيرين (س ، ص) إيجاد معامل الارتباط الخطي البسيط (معامل بيرسون) من خلال العلاقات :

$$ر = ب \frac{عص}{عص} \quad (١٦-٨)$$

$$ر = د \frac{عص}{عص} \quad (١٧-٨)$$

٤ - خط انحدار (ص) على (س) يمر بالنقطة (ص ، ص) وكذلك خط انحدار (س) على (ص) وعليه فإن خطا الانحدار يتقاطعان في نقطة واحدة احداثياتها (ص ، ص) .

## معامل التحديد

### Coefficient of Determination

معامل التحديد هو مقياس رقمي محصور بين الصفر والواحد الصحيح وهو عبارة عن نسبة معينة تعكس مدى نجاح نموذج الانحدار الخطي في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع وبالتالي فإن هذا المعامل يقيس مدى صلاحية العلاقة الخطية المستخدمة في تفسير العلاقة بين المتغيرات المستخدمة ، وكلما اقتربت قيمته من الواحد الصحيح كلما دل ذلك على ازدياد صلاحية العلاقة الخطية في تمثيل العلاقة بين المتغيرات المستخدمة . ويرمز لمعامل التحديد بالرمز ( $r^2$ ) حيث يعرف بالعلاقة التالية :

$$r^2 = \frac{\text{مجم (ص - ص)}^2 - \text{مجم (ص - ص)}^2}{\text{مجم (ص - ص)}^2} = 1 - \frac{\text{مجم (ص - ص)}^2}{\text{مجم (ص - ص)}^2}$$

حيث : ( ١٨ - ٨ )

مجم (ص - ص)  $r^2$  تسمى مجموع المربعات الكلية .

مجم (ص - ص)  $r^2$  تسمى مجموع مربعات الخطأ .

وفي حالة الانحدار الخطي البسيط فإن معامل التحديد للنموذج الخطي يساوي :

$$r^2 = \frac{\text{أ} \text{مجم ص} + \text{ب} \text{مجم ص ص} - \text{ن} \text{ ص}^2}{\text{مجم ص ص}^2 - \text{ن} \text{ ص}^2} \quad ( ١٩ - ٨ )$$

## ملاحظة :

في حالة الانحدار الخطي البسيط فإن معامل التحديد للنموذج يساوي مربع معامل ارتباط بيرسون الخطي .

في المثال السابق :

$$r^2 = \frac{(1372 \times 0,9474) + (130 \times 3,5263)}{(13) \cdot 10 - 1834} = 0,474$$

$$0,474 = \frac{68,2518}{144} = \frac{1690 - 1299,8328 + 458,4190}{1690 - 1834}$$

يعني هذا أن النموذج الخطي المقدر لخط انحدار (ص) على (س) نصح في تفسير ٤٧,٤٪ من التغيرات في (ص) من خلال العلاقة الخطية مع المتغير (س) ويدل بالتالي على أن العلاقة الخطية ليست بالعلاقة القوية .

معامل الارتباط الخطي بين (س، ص) لهذا المثال يساوي ٠,٦٨٨٢ وبتربيع هذه القيمة يمكن الحصول على معامل التحديد السابق .

مثال (٨ - ٢) : إذا علمت أن :

$$\begin{aligned} \bar{ص} &= ١٠, \bar{س} = ٢٠, ع_{ص} = ٢, ع_{س} = ١,٥ \\ \text{معامل الارتباط الخطي بين الظاهرتين (ص، س) هو } r &= ٠,٦ \\ \text{أوجد : } ١ - \text{خط انحدار (ص) على (س).} \\ ٢ - \text{خط انحدار (س) على (ص).} \\ ٣ - \text{التنبؤ بقيمة س عندما ص} &= ١٠. \end{aligned}$$

الحل :

١ - خط انحدار (ص) على (س) هو :

$$ص - \bar{ص} = r \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} (س - \bar{س})$$

$$\text{ص} - ٢٠ = \frac{١,٥}{٢} \times ,٦ = (١٠ - \text{ص})$$

$$\text{ص} - ٢٠ = ,٤٥ = (١٠ - \text{ص})$$

$$\text{ص} - ٢٠ = ,٤٥ = \text{ص} - ٤,٥$$

$$\therefore \text{ص} = ,٤٥ + ١٥,٥ =$$

٢ - خط انحدار (ص) على (ص) هو :

$$\text{ص} - \overline{\text{ص}} = \frac{\overline{\text{ع}}}{\overline{\text{ع}}}\text{ص} - \overline{\text{ص}}$$

$$\text{ص} - ١٠ = \frac{٢}{١,٥} \times ,٦ = (٢٠ - \text{ص})$$

$$\text{ص} - ١٠ = ,٨ = (٢٠ - \text{ص})$$

$$\text{ص} - ١٠ = ,٨ = \text{ص} - ١٦$$

$$\text{ص} = ,٨ = \text{ص} - ٦$$

$$١٠ = \text{عندما ص} =$$

$$\therefore \text{ص} = ,٨ \times ١٠ - ٦ =$$

$$= ٢ = ٦ - ٨ =$$

ملاحظة :

نجد من الحل السابق أن  $\text{ب} = ,٤٥$  ،  $\text{د} = ,٨$  ،

$$\text{ومن ثم فإن } \text{ر} = \sqrt{\text{ب د}} = \sqrt{,٤٥ \times ,٨} = \sqrt{,٣٦} = ,٦$$

وهذا يؤكد صحة الحل السابق .

مثال ( ٨ - ٣ ) : إذا علمت أن

معامل انحدار (ص) على (س)  $= ,٤$  ،

$$\overline{\text{س}} = ٢٠ ، \overline{\text{ص}} = ٣٠$$

- ١ - أوجد معادلة انحدار (ص) على (س) .
- ٢ - أوجد معادلة انحدار (س) على (ص) إذا علمت أن معامل الارتباط بين الظاهرتين (س ، ص) هو  $r = ٨$  ،

الحل :

- ١ - معادلة انحدار (ص) على (س) هي :
- $$\text{ص} - \text{ص} = \text{ب} ( \text{س} - \text{س} )$$
- $$\text{ص} - ٣٠ = ٤ ( \text{س} - ٢٠ )$$
- $$\text{ص} - ٣٠ = ٤ \text{س} - ٨٠$$
- $$\text{ص} = ٤ \text{س} + ٢٢$$
- ٢ - بمعلومية  $r = ٨$  ،  $\text{ب} = ٤$  ، يمكن إيجاد معامل انحدار (س) على (ص) من العلاقة .

$$r = \frac{\text{ب}}{\text{د}} \times \text{د}$$

$$٨ = \frac{٤}{\text{د}} \times \text{د}$$

$$\therefore \text{د} = \frac{٤}{٨} = ١,٦$$

∴ معادلة انحدار (س) على (ص) هي :

$$\text{س} - \text{س} = \text{د} ( \text{ص} - \text{ص} )$$

$$\text{س} - ٢٠ = ١,٦ ( \text{ص} - ٣٠ )$$

$$\text{س} - ٢٠ = ١,٦ \text{ص} - ٤٨$$

$$\text{س} = ١,٦ \text{ص} - ٢٨$$

## الخطأ المعياري للتقدير

### Standard Error of Estimate

عند دراسة انحدار (ص) على (س) فإن الخطأ المعياري للتقدير (أو ما يسمى بخطأ التقدير) هو الخطأ في تقدير قيمة (ص) إذا علمت قيمة (س) وهو مؤشر لقياس درجة انتشار القيم الأصلية (ص) حول خط الانحدار  

$$ص = أ + ب س$$
 وهو الجذر التربيعي للمقدار :

$$ع^2_{ص/س} = \frac{1}{ن-٢} \{ مج (ص - ش) \} \quad (٢٠ - ٨)$$

نلاحظ أننا طرحنا المقدار (٢) من حجم العينة في المقام نظراً لأننا قدرنا معلمتين وهما (أ ، ب) من بيانات العينة . والمقام (ن - ٢) يسمى بـ درجات الحرية .

وبالتعويض عن ش = أ + ب س في المعادلة (٢٠ - ٨) نصل إلى الصورة التالية لمربع الخطأ المعياري للتقدير .

$$ع^2_{ص/س} = \frac{1}{ن-٢} (مج ص^٢ - ب مج ص - أ مج ص) \quad (٢١ - ٨)$$

وبالمثل عند دراسة انحدار (س) على (ص) فإن الخطأ المعياري لتقدير قيمة (س) بمعلومية قيمة (ص) يمكن حسابه من العلامة .

$$ع^2_{س/ص} = \frac{1}{ن-٢} (مج س^٢ - د مج س - ج مج س) \quad (٢٢ - ٨)$$

حيث قيمة (س) المقطرة هي ش = ج + د ص .

وتتضح أهمية الخطأ المعياري للتقدير في استخدامه في كثير من اختبارات الفروض الاحصائية وفي تقدير معامل الارتباط .

العلاقة بين خطأ التقدير ومعامل الارتباط :

بافتراض النموذج الخطي البسيط وبالتعويض عن قيمتي ( أ ، ب ) في  
( ٨ - ٥ ) ، ( ٨ - ٧ ) على الترتيب في المعادلة ( ٨ - ٢١ ) نصل إلى  
العلاقة التالية :

$$ع\text{ص}/\text{س} = ع^2\text{ص} (١ - ر^2) \quad (٨ - ٢٣)$$

ومن ثم يمكن إيجاد الخطأ المعياري للتقدير بمعلومية معامل الارتباط  
والانحراف المعياري للمتغير (ص) من العلاقة :

$$ع\text{ص}/\text{س} = ع\text{ص} \sqrt{١ - ر^2} \quad (٨ - ٢٤)$$

كما أننا بمعلومية مربع خطأ التقدير وتباين (ص) يمكننا حساب معامل  
التحديد  $ر^2$  من العلاقة :

$$ر^2 = ١ - \frac{ع\text{ص}/\text{س}}{ع\text{ص}} \quad (٨ - ٢٥)$$

وهذه الصورة لمعامل التحديد تعادل العلاقة السابقة في ( ٨ - ١٨ )  
وبأخذ الجذر التربيعي للناتج في ( ٨ - ٢٥ ) نحصل على قيمة معامل  
الارتباط الخطي البسيط .

مثال ( ٨ - ٤ ) :

إذا توافرت لديك البيانات التالية عن الظاهرتين (س، ص) :

$$\begin{array}{lll} \text{مجم ص} = ٥٣٠ & \text{مجم ص} = ٤٥٠ & \text{ن} = ١٠ \\ \text{مجم س ص} = ٢٤٩٢٤ & \text{مجم س}^2 = ٢٩٩٨٢ & \text{مجم ص}^2 = ٢١١٤٤ \end{array}$$

والمطلوب إيجاد : -

١ - معادلة انحدار (ص) على (س) .



- ٢ - خطأ التقدير لخط انحدار (ص) على (س).
- ٣ - معامل الارتباط الخطي البسيط بمعلومية خطأ التقدير .
- الحل :

$$ب = \frac{ن \text{ مجد ص} - (مجد ص) (مجد س)}{ن \text{ مجد س} - (مجد س)^2}$$

$$٥٦٨ = \frac{٤٥٠ \times ٥٣٠ - ٢٤٩٢٤ \times ١٠}{٢(٥٣٠) - ٢٩٩٨٢ \times ١٠}$$

$$١٤,٩ = ٥٣ \times ٥٦٨ - ٤٥ = أ$$

معادلة انحدار (ص) على (س) هي :

$$ص = ١٤,٩ + ٥٦٨ س$$

- ٢ - الخطأ المعياري للتقدير هو الجذر التربيعي للمقدار .

$$ع^2 / س = \frac{١}{ن - ٢} (مجد ص - ب \text{ مجد س} - أ \text{ مجد س})$$

$$= \frac{١}{٨} (٤٥٠ \times ١٤,٩ - ٢٤٩٢٤ \times ٥٦٨ - ٢١١٤٤٤) = ٣٥,٢٧$$

$$\therefore \text{خطأ التقدير ع/س} = \sqrt{٣٥,٢٧} = ٥,٩٤$$

وهذا يعني أنه لتقدير قيمة (ص) بمعلومية قيمة (س) فإن الخطأ المعياري لهذا التقدير هو ٥,٩٤ .

$$٣ - ع^2 / س = \frac{\text{مجد ص}^2}{ن} - \left( \frac{\text{مجد ص}}{ن} \right)^2$$

$$= ٨٩,٤ = \frac{٢(٤٥) - ٢١١٤٤}{١٠}$$

$$r = 1 - \frac{\sum \frac{E^2}{n}}{\sum E}$$

$$= 1 - \frac{35,27}{89,4} = 0,605$$

∴ معامل الارتباط بمعلومية الخطأ المعياري للتقدير .

$$= \sqrt{0,605} = 0,778$$

ملاحظات :

١ - يستطيع القارئ أن يحصل على معامل الارتباط الخطي باستخدام الصورة المباشرة لمعامل بيرسون .

٢ - في حالة الارتباط التام ( $r = \pm 1$ ) فإن  $\sum \frac{E^2}{n} =$  صفر أي أنه لا يكون هناك خطأ في التقدير في حالة الارتباط التام .

## ثانياً : الانحدار الخطي المتعدد

### Multiple Linear Regression

يمكن تعميم دراستنا لأسلوب الانحدار الخطي البسيط في حالة دراسة العلاقة بين متغير تابع وعدد من المتغيرات المستقلة . ولتوضيح فكرة الانحدار الخطي المتعدد نفترض أن لدينا متغيراً تابعاً (ص) ومتغيرين مستقلين هما (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub>) وأن العلاقة بينهما خطية في الصورة

$$\text{ش} = \text{أ} + \text{ب}_١ \text{س}_١ + \text{ب}_٢ \text{س}_٢ \quad (٨ - ٢٦)$$

حيث :

أ مقدار ثابت

ب<sub>١</sub> هي مقدار التغير في قيمة (ص) نتيجة لزيادة (س<sub>١</sub>) بوحدة واحدة مع ثبات تأثير (س<sub>٢</sub>) .

ب<sub>٢</sub> هي مقدار التغير في قيمة (ص) نتيجة لزيادة (س<sub>٢</sub>) بوحدة واحدة مع ثبات تأثير (س<sub>١</sub>) .

ولإيجاد القيم (أ ، ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub>) نستخدم طريقة المربعات الصغرى والتي تتضمن أن يكون مجموع مربعات انحرافات القيم عن خط الانحدار أقل ما يمكن . ويتقدير مجموع مربعات الانحرافات وأجراء التفاضل الجزئي بالنسبة لكل من (أ ، ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub>) يمكن الحصول على مجموعة المعادلات الآتية :

$$\begin{aligned} \text{مجم ص} &= \text{ن أ} + \text{ب}_١ \text{مجم س}_١ + \text{ب}_٢ \text{مجم س}_٢ \\ \text{مجم س}_١ \text{ ص} &= \text{أ مجم س}_١ + \text{ب}_١ \text{مجم س}_١^٢ + \text{ب}_٢ \text{مجم س}_١ \text{س}_٢ \\ \text{مجم س}_٢ \text{ ص} &= \text{أ مجم س}_٢ + \text{ب}_١ \text{مجم س}_١ \text{س}_٢ + \text{ب}_٢ \text{مجم س}_٢^٢ \end{aligned} \quad (٨ - ٢٧)$$

حيث يمكن حل هذه المعادلات لتقدير قيم ( أ ، ب ، ب<sup>٢</sup> ) باستخدام طريقة التعويض أو استخدام أسلوب المحددات أو المصفوفات في حل مجموعة من المعادلات الخطية .

الخطأ المعياري للتقدير وعلاقته بمعامل الارتباط :

يمكن الحصول على مربع الخطأ المعياري للتقدير في هذه الحالة باستخدام العلاقة .

$$ع^2_{ص/س، س} = \frac{1}{ن-٣} (مج ص^2 - ب^2 مج س - ب مج ص س - أ - ص - أ)$$

٨)

ونلاحظ أننا طرحنا ٣ من حجم العينة في المقام نظراً لأننا قدرنا ثلاثة معالم في هذه الحالة وهم ( أ ، ب ، ب<sup>٢</sup> ) من بيانات العينة .

وبالمثل يمكن اثبات العلاقة بين الخطأ المعياري للتقدير ومعامل الارتباط في الصورة .

$$ع^2_{ص/س، س} = ع^2_{ص(١-ر^2)} \quad (٨-٢٩)$$

ومن ثم يمكن إيجاد معامل الارتباط المتعدد بمعلومية الخطأ المعياري للتقدير وتباين (ص) من العلاقة

$$ر = \sqrt{١ - \frac{ع^2_{ص/س، س}}{ع^2_{ص}}} \quad (٨-٣٠)$$

وتجدر الإشارة هنا بأنه قد سبق إيجاد معامل الارتباط المتعدد بطريقة أخرى باستخدام معاملات الارتباط الخطية البسيطة بين الظواهر في الفصل

السابق بالمعادلة (٧-١١) وللحصول على معامل الارتباط المتعدد بهذه الطريقة يجب اتباع الخطوات التالية :-

١ - تقدير قيم (أ ، ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub>) بحل مجموعة المعادلات (٨-٢٧) بافتراض معادلة الانحدار الخطي المتعدد .

٢ - استخدام العلاقة (٨-٢٨) في ايجاد مربع الخطأ المعياري للتقدير .

٣ - ايجاد تباين (ص) .

٤ - استخدام العلاقة (٨-٣٠) في ايجاد معامل الارتباط المتعدد .

كما يتضح في حل المثال التالي :

مثال (٨-٥) : إذا علمت أن :

$$\begin{array}{llll} \text{مجد ص} = ١٥ & \text{مجد ص}^2 = ٥٥ & \text{مجد ص} = ٧٢ & \\ \text{مجد ص} = ٢٠ & \text{مجد ص}^2 = ٩٦ & \text{مجد ص} = ١٠٥ & \\ \text{مجد ص} = ٣٠ & \text{مجد ص}^2 = ٢٠٦ & \text{مجد ص} = ١٣٦ & \\ & \text{ن} = ٥ & & \end{array}$$

أوجد معامل الارتباط المتعدد بين (ص) وكل من (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub>)

**الحل :**

١ - بافتراض معادلة الانحدار المتعدد بين (ص) وكل من (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub>) في

الصورة :  $\text{ص} = \text{أ} + \text{ب}_1 \text{س}_1 + \text{ب}_2 \text{س}_2$

ولتحديد قيم (أ ، ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub>) بالتعويض في مجموعة المعادلات

(٨-٢٧) نحصل على :

$$١٥ = \text{أ} + ٢٠ \text{ب}_1 + ٣٠ \text{ب}_2$$

$$٧٢ = \text{أ} + ٩٦ \text{ب}_1 + ١٣٦ \text{ب}_2$$

$$١٠٥ = \text{أ} + ٢٠٦ \text{ب}_1 + ١٣٦ \text{ب}_2$$

ويحل هذه المعادلات نجد أن :

$$, r = r \cup \{ \}, \quad , \xi 0 = r \cup \{ \}, \quad , \gamma - = r$$

ومعادلة الانحدار المتعدد هي :

$$\hat{u} = 45, 1, 3, 2, 6$$

٢ - مربع الخطأ المعياري للتقدير :

$$\frac{1}{3-n} = \frac{1}{3-10} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}$$

۳ - تباین (ص) :

$$0.96 = \frac{r(10)}{n} - \frac{r(50)}{n} =$$

٤ - معامِل الارتباط المتعدد :

$$\frac{\frac{100}{100} \times 100}{100} - 1 \sqrt{\quad} = 0$$

∴ الارتباط قوي جداً بين المتغيرات الثلاثة . وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام معاملات الارتباط الخطية البسيطة بين أزواج المتغيرات في مثال ( ٧ - ١٠ ) .

مثال ( ٨ - ٦ ) :

من البيانات التالية :

ص	٦	٤	١٠	٩	٧	٥	٢	٨	٤	١٠
س١	٧	٥	٩	١٠	٨	٧	٤	٨	٢	٩
س٢	٢٣	٢٢	١٩	٢٤	٢٢	٢٥	٢٢	١٩	٢٤	٢١

المطلوب :

- ١ - إيجاد خط الانحدار المتعدد (ص) على (س١ ، س٢) .
- ٢ - إيجاد الخطأ المعياري للتقدير .
- ٣ - إيجاد معامل الارتباط المتعدد .

الحل :

ص	س١	س٢	ص٢	س١٢	س٢٢	ص١	س١ص	س١س٢	ص٢س١
٦	٧	٢٣	٣٦	٤٩	٥٢٩	٤٢	١٣٨	١٦١	١٦١
٤	٥	٢٢	١٦	٢٥	٤٨٤	٢٠	٨٨	١١٠	١١٠
١٠	٩	١٩	١٠٠	٨١	٣٦١	٩٠	١٩٠	١٧١	١٧١
٩	١٠	٢٤	٨١	١٠٠	٥٧٦	٩٠	٢١٦	٢٤٠	٢٤٠
٧	٨	٢٢	٤٩	٦٤	٤٨٤	٥٦	١٥٤	١٧٦	١٧٦
٥	٧	٢٥	٢٥	٤٩	٦٢٥	٣٥	١٢٥	١٧٥	١٧٥
٢	٤	٢٢	٤	١٦	٤٨٤	٨	٤٤	٨٨	٨٨
٨	٨	١٩	٦٤	٦٤	٣٦١	٦٤	١٥٢	١٥٢	١٥٢
٤	٢	٢٤	١٦	٤	٥٧٦	٨	٩٦	٤٨	٤٨
١٠	٩	٢١	١٠٠	٨١	٤٤١	٩٠	٢١٠	١٨٩	١٨٩
٦٥	٦٩	٢٢١	٤٩١	٥٣٣	٤٩٢١	٥٠٣	١٤١٣	١٥١٠	١٥١٠

١ - معادلة خط الانحدار المتعدد هي :

$$\text{ض} = \text{أ} + \text{ب}_١ \text{س}_١ + \text{ب}_٢ \text{س}_٢$$

حيث قيم (أ، ب<sub>١</sub>، ب<sub>٢</sub>) يمكن تحديدها بحل مجموعة المعادلات الآتية :

$$٦٥ = ١٠ + \text{أ} + ٦٩ \text{ب}_١ + ٢٢١ \text{ب}_٢$$

$$٥٠٣ = ٦٩ + \text{أ} + ٥٣٣ \text{ب}_١ + ١٥١٠ \text{ب}_٢$$

$$١٤١٣ = ٢٢١ + \text{أ} + ١٥١٠ \text{ب}_١ + ٤٩٢١ \text{ب}_٢$$

باستخدام طريقة التعويض يمكن للقارى أن يصل إلى :

$$\text{أ} = ٦,٦١٦, \text{ب}_١ = ٨٨, \text{ب}_٢ = -٢٨$$

ومعادلة الانحدار المتعدد هي :

$$\text{ض} = ٦,٦١٦ + ٨٨ \text{س}_١ - ٢٨ \text{س}_٢$$

٢ - مربع الخطأ المعياري للتقدير :

$$\text{ع}^٢_{\text{م.س.}} = \frac{١}{٣ - \text{ن}} (\text{م.ص}^٢ - \text{ب}_١ \text{م.س}_١ - \text{ب}_٢ \text{م.س}_٢ - \text{أ.م.ص})$$

$$\frac{١}{٧} \{ (٦٥)٦,٦١٦ - (١٤١٣)(٨٨) - (٥٠٣)(-٢٨) \} = ١,٩٩٤$$

$$\sqrt{١,٩٩٤} = ١,٤١ \text{ الخطأ المعياري للتقدير}$$

$$٣ - \text{ع}^٢_{\text{م.س.}} = \frac{\text{م.ص}^٢}{\text{ن}} - \left( \frac{\text{م.ص} \text{ب}_١}{\text{ن}} \right) - \left( \frac{\text{م.ص} \text{ب}_٢}{\text{ن}} \right) - \left( \frac{\text{أ.م.ص}}{\text{ن}} \right)$$

$$= \frac{٤٩١}{١٠} - \left( \frac{٦٥}{١٠} \right) - \left( \frac{٦,٨٥}{١٠} \right) - \left( \frac{٢٨}{١٠} \right) = ٦,٨٥$$

٤ - معامل الارتباط المتعدد



$$r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n^2}}{n-1}} = \sqrt{\frac{1,994}{6,85}} = \sqrt{0,291} = 0,54$$

∴ الارتباط قوي بين المتغير التابع (ص) وكل من المتغيرين المستقلين (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub>) .

ملاحظة هامة :

نظراً لأن القارئ في هذه المرحلة قد لا يكون ملماً بأساليب حل مجموعة من المعادلات الخطية ومن ثم يكون من الأسر له التعويض المباشر لإيجاد قيم الثوابت (أ ، ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub>) . وباستخدام التعويض الجبري في حل مجموعة المعادلات (٨ - ٢٧) نجد أن :

$$ب_1 = \frac{(مج س_٢ ص) - (مج س_١ ص) - (مج س_٢ ص) + (مج س_١ ص)}{(٣١ - ٨)}$$

$$ب_2 = \frac{(مج س_٢ ص) - (مج س_١ ص) - (مج س_٢ ص) + (مج س_١ ص)}{(٣٢ - ٨)}$$

$$أ = ص - ب_١ س_١ - ب_٢ س_٢$$

حيث :

$$ص = ص ، س_١ = س_١ ، س_٢ = س_٢ ، ص = ص$$

هي الانحرافات عن الأوساط الحسابية وأن :

$$مج ص = مج (ص - ص) = مج ص - مج ص$$

$$مج ص_١ = مج (س_١ - س_١) (ص - ص)$$

$$= مج س_١ ص - \frac{(مج س_١) (مج ص)}{ن}$$

وبالمثل نحسب المجاميع الأخرى اللازمة لإيجاد القيم (ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub>)  
 في (٣١ - ٨) ، (٣٢ - ٨) ومن ثم إيجاد قيمة (أ) في (٨ - ٣٣)  
 وتقدير معادلة الانحدار المتعدد بعد ذلك بالتعويض في (٨ - ٢٦) كما  
 يتضح في المثال التالي :

مثال (٨ - ٧) :

أوجد معادلة خط الانحدار المتعدد (ص) على (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub>)  
 بالتعويض المباشر من بيانات المثال السابق (٨ - ٦) .

الحل :

$$\text{مجم ص}^٢ = \text{مجم ص}^٢ - \frac{(\text{مجم ص})^٢}{ن} = ٤٩١ - \frac{٢(٦٥)}{١٠} = ٦٨,٥$$

$$\text{مجم ص}^٢ = \text{مجم ص}^٢ - \frac{(\text{مجم ص})^٢}{ن} = ٥٣٣ - \frac{٢(٦٩)}{١٠} = ٥٦,٩$$

$$\text{مجم ص}^٢ = \text{مجم ص}^٢ - \frac{(\text{مجم ص})^٢}{ن} = ٤٩٢١ - \frac{٢(٢٢١)}{١٠} = ٣٦,٩$$

$$\text{مجم ص}^٢ = \text{مجم ص}^٢ - \frac{(\text{مجم ص})^٢}{ن} = ٥٠٣ - \frac{٢(٦٥)(٦٩)}{١٠} = ٥٤,٥$$

$$\text{مجم ص}^٢ = \text{مجم ص}^٢ - \frac{(\text{مجم ص})^٢}{ن} = ١٤١٣ - \frac{٢(٦٥)(٢٢١)}{١٠} = ٢٣,٥$$

$$\text{مجم ص}^٢ = \text{مجم ص}^٢ - \frac{(\text{مجم ص})^٢}{ن} = ١٥١٠ - \frac{٢(٢٢١)(٦٩)}{١٠} = ١٤,٩$$

وبالتعويض في (٨ - ٣١) نحصل على قيمة ب<sub>١</sub>

$$\frac{(23, 5) - (14, 9) - (54, 5)(36, 9)}{(14, 9) - (36, 9)(56, 9)} = \text{ب}_1$$

$$, 88 = \frac{350, 15 - 2011, 05}{1877, 6} =$$

وبالتعويض في ( ٨ - ٣٢ ) نحصل على قيمة ب<sub>٢</sub> .

$$\frac{(54, 5)(14, 9) - (23, 5)(56, 9)}{1877, 6} = \text{ب}_2$$

$$, 28 - = \frac{812, 05 + 1337, 15 -}{1877, 6} =$$

بالتعويض في ( ٨ - ٣ ) نحصل على قيمة ( أ )

$$\left( \frac{221}{10} \right) (, 28 -) - \left( \frac{79}{10} \right) , 88 - \frac{75}{10} = \text{أ} .$$

$$7, 616 = 6, 188 + 6, 072 - 6, 5 =$$

وبالتعويض في ( ٨ - ٢٦ ) نحصل على معادلة خط الانحدار المتعدد في الصورة

$$\text{ش} = 6, 616 + , 88 \text{ س}_1 - , 28 \text{ س}_2$$

مثال ( ٨ - ٨ ) :

أوجد معادلة خط انحدار (ص) على (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub>) بالتعويض المباشر من بيانات مثال ( ٨ - ٥ ) .

الحل :

$$\text{مجد ص} = \frac{r(15)}{5} - 50 = 10$$

$$١٦ = \frac{٢(٢٠)}{٥} - ٩٦ = \text{مجموعه ٢}$$

$$٢٦ = \frac{٢(٣٠)}{٥} - ٢٠٦ = \text{مجموعه ٢}$$

$$١٢ = \frac{(١٥)(٢٠)}{٥} - ٧٢ = \text{مجموعه ١}$$

$$١٥ = \frac{(١٥)(٣٠)}{٥} - ١٠٥ = \text{مجموعه ٣}$$

$$١٦ = \frac{(٣٠)(٢٠)}{٥} - ١٣٦ = \text{مجموعه ٣}$$

$$,٤٥ = \frac{٢٤٠ - ٣١٢}{١٦٠} = \frac{(١٥)(١٦) - (١٢)(٢٦)}{٢(١٦) - (٢٦)(١٦)} = \text{ب ١}$$

$$,٣ = \frac{١٩٢ - ٢٤٠}{١٦٠} = \frac{(١٢)(١٦) - (١٥)(١٦)}{١٦٠} = \text{ب ٢}$$

$$١ = \text{ص} - \text{ب ١} - \text{ب ٢} - \text{ص ٢}$$

$$\left(\frac{٣٠}{٥}\right), ٣ - \left(\frac{٢٠}{٥}\right), ٤٥ - \frac{١٥}{٥} =$$

$$,٦ - = ١,٨ - ١,٨ - ٣ =$$

∴ معادلة خط الانحدار المتعدد هي :

$$\text{ص}^{\wedge} = ,٦ - + ,٤٥ \text{ ص} + ,٣ \text{ ص}٢$$

وهي نفس النتيجة التي سبق الحصول عليها .

## تمارين الفصل الثامن

(١) من الجدول التالي الذي يوضح العلاقة بين المتغيرين (س، ص) :

س	١٢	١٨	٢٤	٣٠	٣٦	٤٢	٤٨
ص	٥٣	٥٧	٦٣	٧٢	٨	٨٧	٨٤

- أ - أوجد معادلة انحدار (ص) على (س)  
 ب - تنبأ بقيمة (ص) عندما (س) = ٥٠  
 ج - أوجد معادلة انحدار (س) على (ص).

(٢) إذا توافرت لديك البيانات الآتية عن المتغيرين (س ، ص) .

مجد س = ٧٤	مجد س <sup>٢</sup> = ٦٠٦	مجد ص = ٤٤٨
مجد ص = ٦١	مجد ص <sup>٢</sup> = ٤٧٧	ن = ١٠

- أ - أوجد معادلة خط الانحدار (ص) على (س).  
 ب - احسب معامل الارتباط الخطي البسيط اذا علمت أن معادلة خط انحدار (س) على (ص) هي  $س = ٤٩ر ص + ٤١١$ .

(٣) البيانات التالية عبارة عن ملخص احصائي لبيانات أخذت عن أسعار عشر سلع في كل من سنة ١٩٧٥ (المتغير س) وأسعارها المقابلة في سنة ١٩٨٥ (المتغير ص).

مجد س = ٥٠	مجد ص = ٦٠	مجد س ص = ٤٠٠
مجد س <sup>٢</sup> = ٥٠٠	مجد ص <sup>٢</sup> = ٦١٠	

أ - أوجد معادلة الانحدار الخطي البسيط لتقدير أسعار سنة ١٩٨٥ باستخدام أسعار ١٩٧٥ .

ب - أوجد الخطأ المعياري للتقدير ثم اشتق معامل الارتباط الخطي البسيط .

(٤) في دراسة للظاهرتين (س، ص) باستخدام بيانات عن ١٠ وحدات معينة ، تبين أن  $\text{مجس ص} = ٤٧٥٠$  وكذلك تبين ما يلي :

الظاهرة ص	الظاهرة س	
١٦	٣٠	الوسط الحسابي
٢	٥	الانحراف المعياري

أ - احسب معامل الارتباط الخطي البسيط بين (س، ص) .

ب - ما هو تقديرك لقيمة (س) إذا كانت قيمة ص = ٨ .

(٥) فيما يلي بيان عن درجات عشرة من الطلبة في اختبارين أحدهما في المحاسبة (س)، وثانيهما في الإدارة (ص) .

س	٣٢	٤٠	٥٠	٢٥	٤٠	٣٢	٤٦	٣٢	٤٥	٢٨
ص	٣٩	٢٧	٢٣	٣٩	٢٧	١٦	١٨	٣٣	٢٧	٤٧

أ - أوجد معادلة خط انحدار (س) على (ص)

ب - أوجد معادلة خط انحدار (ص) على (س) .

ج - استنتج قيمة معامل الارتباط الخطي البسيط بين (س، ص) بدلالة معاملي الانحدار .

د - أوجد الخطأ المعياري لتقدير انحدار (ص) على (س) ثم اشتق معامل الارتباط الخطي البسيط للتأكد من صحة الحل في (جـ) .

(٦) إذا علمت أن : ص ترمز إلى الوزن  
 س<sub>١</sub> ترمز إلى الطول  
 س<sub>٢</sub> ترمز إلى العمر

وكانت :

$$\begin{aligned} \text{مجد ص} &= ٧٥٣ , \text{مجد س}_1 = ٦٤٣ , \text{مجد س}_2 = ١٠٦ \\ \text{مجد ص}^2 &= ٤٨١٣٩ , \text{مجد س}_1^2 = ٣٤٨٤٣ , \text{مجد س}_2^2 = ٩٧٦ \\ \text{مجد س}_1 \text{ ص} &= ٤٠٨٣٠ , \text{مجد س}_2 \text{ ص} = ٦٧٩٦ \\ \text{مجد س}_1 \text{ س}_2 &= ٥٧٧٩ , \text{ن} = ١٢ \end{aligned}$$

أ — أوجد معادلة خط انحدار الوزن على كل من الطول والعمر .  
 ب — أوجد معامل الارتباط المتعدد .

(٧) من البيانات التالية لقيم المتغيرات (ص، س<sub>١</sub>، س<sub>٢</sub>) .

ص	٨	٥	٢	١	٦	٤	٨	٧	٩
س <sub>١</sub>	٨	٥	٣	٢	٦	٤	٧	٦	٨
س <sub>٢</sub>	٢	٣	٠	١	٤	٥	٨	٦	٧

أ — أوجد معادلة انحدار (ص) على كل من (س<sub>١</sub>، س<sub>٢</sub>) .  
 ب — أوجد الخطأ المعياري للتقدير .  
 ج — أوجد معامل الارتباط المتعدد .

(٨) البيانات التالية هي ملخص دراسة على ١٠ وحدات معاينة لدراسة

العلاقة بين الظواهر (ص، س<sub>١</sub>، س<sub>٢</sub>) :

$$\text{مجد ص} = ١٩١ , \text{مجد س}_1 = ٢٢٧٠ , \text{مجد س}_2 = ٦٨٦$$

$$\begin{aligned} \text{مجمد س ١ ص} &= ٤٨٦٩٠, \text{ مجمد س ٢ ص} = ١٢٥٦٩, \\ \text{مجمد س ١ ص ٢} &= ١٣٩٥٦٥, \\ \text{مجمد س ٢ ص ١} &= ٥٩٤٨٣٢, \text{ مجمد س ٢ ص ٢} = ٥٢٦٨٢, \text{ مجمد ص ٢} = ٤٢٦٧ \end{aligned}$$

والمطلوب :

- أ - ايجاد معادلة انحدار (ص) على كل من س١ ، س٢ .  
 ب - ايجاد معامل الارتباط المتعدد .  
 ج - ايجاد معامل الارتباط الجزئي بين (ص، س١) مع تثبيت أثر (س٢).

(٩) البيانات التالية هي دراسة على ١٠ أسر لدراسة العلاقة بين الانفاق السنوي على الملابس (ص) بالآلف دينار وعدد أفراد الأسرة (س١) ودخل الأسرة السنوي (س٢) بالآلف دينار .

ص	٨, ١, ٤, ٣, ٢, ٣, ٨, ٢, ١, ٣, ٣, ٩, ٢, ٤
س١	١, ٢, ١, ٢, ٢, ٢, ٣, ٤, ٣, ٥, ٣
س٢	٢١, ٢٥, ١٠, ٣٧, ٤٨, ٢٧, ٣٥, ٣٥, ٢٥, ٥١

والمطلوب :

- أ - ايجاد معادلة الانحدار المتعدد (ص) على كل من (س١ ، س٢) .  
 ب - تقدير الاتفاق السنوي على الملابس لأسرة عدد أفرادها ٢ ودخلها السنوي ٢٥ ألف دينار ،  
 ج - ايجاد معامل الارتباط المتعدد .



## الفصل التاسع

### تحليل السلاسل الزمنية

#### Time Series Analysis

#### ١ - تعريف السلسلة الزمنية :

السلسلة الزمنية لأي ظاهرة هي التسلسل الزمني لتغير قيم أو مقادير هذه الظاهرة وذلك في سلسلة تواريخ متتابعة مثل سنين أو أشهر أو أيام وغالباً ما تكون الفترات الزمنية متساوية ومتتالية .

ولما كان الزمن هو عنصر أساسي في السلسلة الزمنية فأحياناً تسمى بالسلسلة التاريخية وتنتج هذه السلاسل الزمنية من مشاهدة الظواهر التي نبهتها مدة من الزمن وقياسها في فترات زمنية منتظمة وتسجيلها في جداول إحصائية .

#### ٢ - أهمية التحليل الاحصائي للسلاسل الزمنية :

ينحصر الغرض من السلسلة الزمنية في أنها تسجل لنا مقادير أو قيم الظاهرة تحت البحث وما يطرأ عليها من تغيرات خلال الزمن وذلك تمهيداً لدراسة هذه التغيرات ومعرفة أسبابها ونتائجها وما يمكن أن يكون هناك من علاقة بين هذه الظاهرة وغيرها من الظواهر المرتبطة بها .

ويساعد التحليل الاحصائي للظواهر الاقتصادية كثيراً من الاقتصاديين ورجال الأعمال على فهم ودراسة التغير الذي وقع للظاهرة في الماضي والحاضر وحتى يمكن التنبؤ بالصورة الحقيقية لسلوك الظاهرة في المستقبل كما أن دراسة المؤثرات التي تؤثر على تطور الظاهرة محل الدراسة وخاصة الظواهر الاجتماعية والاقتصادية تساعد على التخطيط السليم في المستقبل .

#### ٣ - أمثلة السلاسل الزمنية :

السلاسل الزمنية هي التي تصور وتلخص الظواهر الاقتصادية المختلفة خلال فترات زمنية متتالية ومن أمثلة ذلك : -

- كميات الانتاج السنوي من سلعة معينة كالقطن أو البترول .
- عدد السكان سنوياً أو في فترات التعداد .
- عدد الطلبة الحاصلين على الماجستير أو الدكتوراه سنوياً .
- قيمة المبيعات بإحدى محلات القطاع العام شهرياً .
- عدد الطائرات التي تقلع من أحد المطارات شهرياً أو يومياً .
- درجات الحرارة اليومية في مدينة معينة .

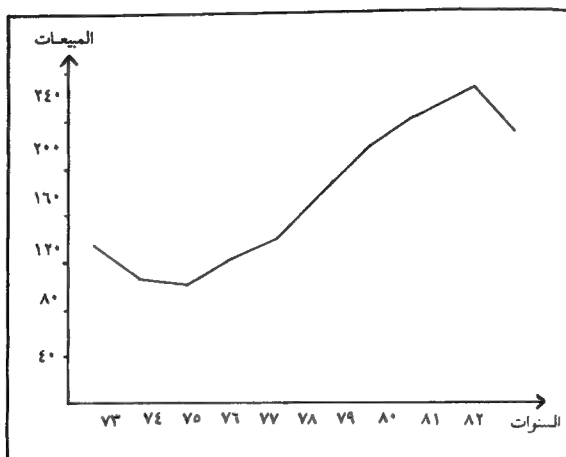
وقبل البدء في تحليل السلاسل الزمنية ودراسة عناصرها نأخذ المثال الرقمي التالي لتوضيح فكرة عرض السلاسل الزمنية في صورة رسم بياني .

مثال ( ٩ - ١ ) :

الأرقام التالية للمبيعات السنوية لإحدى المحلات التجارية مقاسة بالآلاف دينار :

السنة	المبيعات
١٩٧٣	١٤٢
١٩٧٤	١٢٠
١٩٧٥	١١٨
١٩٧٦	١٣٢,٥
١٩٧٧	١٤٣,٥
١٩٧٨	١٧٠
١٩٧٩	١٩٢,٥
١٩٨٠	٢١١,٥
١٩٨١	٢١٧
١٩٨٢	٢٠١

برسم الخط البياني للسلسلة الزمنية يمكن توضيح السير الزمني لها  
بيانياً :



شكل (٩-١)

٤ - عناصر أو مركبات السلسلة الزمنية :

تبدأ دراسة السلسلة الزمنية بمحاولة التعرف على مركباتها أو عناصرها  
لدراسة وبحث ما تعرضت له الظاهرة في الماضي وللتنبؤ بقيمة الظاهرة في  
المستقبل .

ويمكن تقسيم المؤثرات على أي سلسلة زمنية إلى أربعة هي :

- |                      |                                      |
|----------------------|--------------------------------------|
| Trend                | (١) الاتجاه العام                    |
| Cyclical Variations  | (٢) التغيرات الدورية                 |
| Seasonal Variations  | (٣) التغيرات الموسمية                |
| Irregular Variations | (٤) التغيرات العرضية أو غير المنتظمة |

## أولاً : الاتجاه العام :

هو عبارة عن التغير المتظم للملاحظات والظواهر خلال فترة زمنية طويلة سواء كان هذا تغيراً بالزيادة أو النقص فهناك ظواهر بطبيعتها تزايد باستمرار مثل معدل النمو السكاني وظواهر تتناقص مثل معدل الوفيات في الدول النامية والمتقدمة .

وكما سبق ، اتضح أن البداية في دراسة السلسلة الزمنية هي تمثيلها بالرسم ونحصل على خط متعرج يحدد اتجاهات عاماً للظاهرة تنحو نحوه وقد نجد أن :

• خط الاتجاه العام صاعد من أسفل إلى أعلى أي أن الظاهرة تزايد باستمرار .

• خط الاتجاه العام منحدر من أعلى إلى أسفل أي أن الظاهرة تتناقص باستمرار .

• خط الاتجاه العام يأخذ شكل خط مستقيم مواز للمحور الأفقي أي أن الظاهرة تزايد أو تتناقص بمعدل ثابت .

وترجع أهمية تحليل الاتجاه العام على فترات زمنية طويلة للأسباب التالية :

(١) بعد قياس اثر الاتجاه العام يمكن قياس العناصر الأخرى مثل التغيرات الموسمية والدورية .

(٢) بدراسة الاتجاه العام للظواهر يمكن التعرف على سلوك الظواهر في الماضي والحاضر ومن ثم استخدام معادلة الاتجاه العام في التنبؤ بالمستقبل كما يتضح فيما بعد .

## ثانياً : التغيرات الدورية :

هي التغيرات التي تعكس حالات الكساد والانتعاش التي يتعرض لها الاقتصاد القومي فمن الواضح أن هناك تغيرات تطرأ على الظواهر الاقتصادية بطريقة شبه منتظمة حيث تتغير المشاهدات خلال فترة زمنية بالزيادة حتى تصل إلى أقصى حد ممكن ( فترات الانتعاش ) أو تنقص حتى تصل إلى أقل حد ممكن ( فترات الكساد ) .

والتقلبات الدورية لا تخضع لنظام ثابت في تغيرها بمعنى أن الفترة التي تفصل بين حالتي الكساد والانتعاش لا تتسم بالثبات فقد تكون ٣ أو ٥ أو ١٠ أو . . . . سنوات مما يؤدي إلى طول الدورة التجارية وصعوبة التنبؤ بها وقد نتج عن دراسة الدورات الاقتصادية تمييز ثلاثة أنواع هامة هي :

(١) دورة طويلة المدى : تمتد حوالي ٥٠ سنة .

(٢) دورة متوسطة المدى : مداها ٨ - ٩ سنوات .

(٣) دورة قصيرة المدى : مداها ٣ - ٤ سنوات .

ومن ثم يتضح أنه لدراسة اثر الدورة يجب استخدام قيم الظاهرة عن مدة طويلة من السنين حتى يتبين اثرها واضحاً .

## ثالثاً : التغيرات الموسمية :

هي التغيرات الزمنية المنتظمة أو المتكررة خلال فترة زمنية لا تزيد عن سنة . فالسلسلة الزمنية تتأثر بحالة الطلب والعرض والتي تتأثر بدورها بالتغيرات الفصلية وتغيرات المناخ والطقس مثل :

معدل استهلاك المياه يزداد في فصل الصيف .

الطلب على الملابس الثقيلة يزداد في فصل الشتاء .

ومن ثم لا يمكن تعيين التغيرات في قيم الظواهر بمجرد تحديد اثر

الاتجاه العام فقط بل إن هناك تغيرات موسمية تؤثر على كل ظاهرة وتختلف مدتها باختلاف نوع الظاهرة وظروفها .

رابعاً : التغيرات العرضية :

وهي التي لا تحدث إلا لظروف غير متوقعة أو شاذة والتي تؤثر بدورها على الظواهر الاقتصادية مثل قيام الحروب والثورات أو انتشار الأوبئة والأمراض أو حدوث فيضانات أو زلازل .

وسوف يتركز اهتمامنا عند تحليلنا للسلاسل الزمنية على محاولة فصل تأثير كل عنصر من العناصر السابقة عن العناصر الأخرى وفيما يختص بالتغيرات العرضية أو غير المنتظمة فيمكن إهمالها على اعتبار أنها تحدث عادة على فترات متباعدة ومن ثم يمكن دراسة تلك الظواهر في الفترات التي لا تحدث فيها مثل هذه التغيرات غير المنتظمة .

التغيرات السابقة كلها تتضافر مع بعضها البعض لتكون قيم الظاهرة المدروسة زمنياً . وهي ليست بعوامل منفصلة عن بعضها البعض ولكن لسهولة فهمها وتحليلها فصلناها نظرياً .

فمثلاً يصعب فصل التغيرات الموسمية عن الدورية ، لذلك فإن عملية دراسة هذه العناصر وطرق تحليلها تكون متعددة .

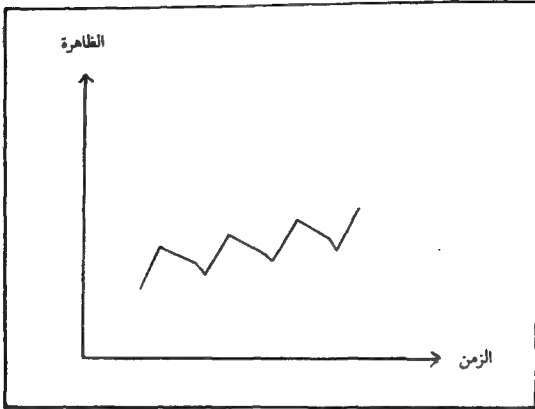
٥ - نماذج السلاسل الزمنية :

يمكن تقسيم السلاسل الزمنية على أساس علاقة العناصر الأربع السابقة إلى نموذجين :

١ - النموذج التجميعي : Additive Model :

وهو الذي تحدد فيه قيم الظاهرة على أساس الجمع الجبري للعناصر الأربع السابقة .

شكل ( ٩-٢ )



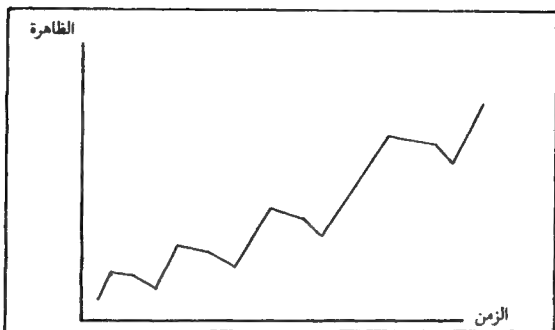
$$ص = ت + م + د + ع$$

- حيث : ت = القيمة الاتجاهية للظاهرة عن الفترة ر .  
 م = أثر الموسمية على الظاهرة عن الفترة ر .  
 د = أثر الدورية على الظاهرة عن الفترة ر .  
 ع = أثر المتغيرات العرضية على الظاهرة عن الفترة ر .

## ٢ - نموذج الضرب Multiplicative Model :

وهو الذي يفترض أن قيمة الظاهرة تتحدد من حاصل ضرب العناصر السابقة :

$$ص = ت \times م \times د \times ع$$



شكل ( ٩ - ٣ )

وتجدر الإشارة إلى أن نموذج الضرب هو الأكثر شيوعاً وهو الذي نفترضه في تحليلنا . وفي هذا النموذج يمكن دراسة وتقدير كل عنصر من عناصر السلسلة على حدة ويمعزل عن العناصر الأخرى- ونظراً لتشابك العناصر المختلفة للسلسلة الزمنية وذلك لتداخل العوامل التي تؤثر فيها تتعرض هذه النماذج لكثير من النقد وبالرغم من ذلك فإنها الأكثر استخداماً عند تحليل السلاسل الزمنية .

مما سبق يتضح انه يمكن فصل تأثير كل عنصر من العناصر السابقة - بافتراض نموذج الضرب - باعتبار أن هذه العناصر مستقلة . ويمكن توضيح العلاقة بين أي ظاهرة (ص) والعناصر المختلفة من اتجاه عام (ت) وتغير دوري (د) وتغير موسمي (م) وتغير عرضي (ع) بالشكل التالي :

ص = ف (س) بمعنى (ص) دالة في المتغير الزمني (س)

ص = ف (ت، م، د، ع)

٦ - : قياس عناصر السلسلة الزمنية :

لدراسة السلاسل الزمنية ندرس مكونات هذه السلسلة :



## أولاً : طرق تقدير الاتجاه العام

هنالك عدة طرق لدراسة الاتجاه العام في السلاسل الزمنية .

سوف نقتصر على أربع طرق هي :

- (١) طريقة تقدير الاتجاه العام بيانياً من الرسم .
- (٢) طريقة تقدير الاتجاه العام بطريقة شبه المتوسطات .
- (٣) طريقة المربعات الصغرى لتقدير الاتجاه العام .
- (٤) طريقة المتوسطات المتحركة .

(١) طريقة التمهيد البياني Free hand Method :

ويتم بواسطتها قياس الاتجاه العام بطريقة بسيطة وذلك بتمثيل بيانات السلسلة الزمنية - كما سبق شرحها في المثال السابق - ثم تحديد شكل العلاقة بين تغير قيم الظاهرة (ص) بالنسبة للزمن (س) ويتم تمهيد خط ( أ و منحني ) الاتجاه العام بحيث يتوسط قيم الظاهرة .

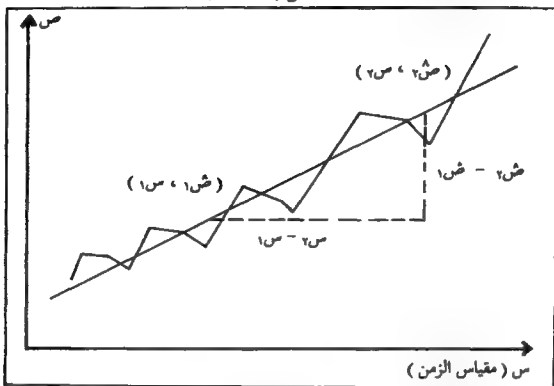
ونستخدم هذه الطريقة عادة لتعطي صورة عامة عن سلوك الظاهرة بالإضافة إلى أنها توفر كثيراً من الوقت والقيود التي يفرضها استخدام صيغة رياضية معينة لتمثيل الاتجاه العام ولكن يعيب هذه الطريقة انه لا يجب الاعتماد عليها في التنبؤ لأنها تعكس عادة التحيز والتحكم الواضح للباحث عند تمثيل البيانات وتمهيد خط الاتجاه العام . ويمكن تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية :

$$ص = أ + ب س \quad (٩ - ١)$$

وذلك بتحديد كل من أ ، ب . حيث تحدد قيمة (ب) بأخذ نقطتين على الخط الممهد ، وفي النقطتين نحدد (ب) من العلاقة :

$$ب = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \quad (٩ - ٢)$$

وهي تمثل ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها الخط المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .  
شكل ( ٩ - ٤ )



حيث  $ش١$  هي قيمة  $ص١$  على الخط الممهد عندما  $س = ١س$   
و  $ش٢$  هي القيمة على هذا الخط المناظرة ل  $س٢$  .

ونحدد ( أ ) بالجزء الذي يقطعه هذا الخط المستقيم من المحور الرأسي . وباختصار يمكن تحديد معادلة الخط المستقيم بتحديد نقطتين عليه من العلاقة :

$$\frac{ش١ - ش٢}{١س - ٢س} = \frac{ص - ش١}{١س - س}$$

$$ص - ش١ = (١س - س) \left( \frac{ش١ - ش٢}{١س - ٢س} \right)$$

$$ص - ش١ = ب (١س - س) .$$

لذلك فإن :

$$ص = ب (١س - س) + ش١ = أ + ب س$$

( ٩ - ٣ )

حيث :  $أ = ش١ - ب س١$

ومن ثم حساب قيمتي أ ، ب والتعويض في ( ٩ - ١ ) نحصل على معادلة الاتجاه العام .

ملاحظات على هذه الطريقة :

هذه الطريقة غير دقيقة في تقدير الاتجاه العام للسلسلة الزمنية ، وتعتمد على تقدير الشخص للخط وعلى دقة رسم الخط البياني للسلسلة ، وقلمنا تستخدم لحساب أو تقدير الاتجاه العام وذلك لاختلاف تقدير الاتجاه العام باختلاف الشخص الذي يقدره .

(٢) طريقة شبه المتوسطات :

تعتمد هذه الطريقة في تقدير الاتجاه العام للسلاسل الزمنية على تقسيم السلاسل الزمنية إلى قسمين متساويين بقدر الامكان ، ثم يحسب متوسط قيمة السلسلة لكل جزء على حده ( متوسط المتغير الذي يقيس الظاهرة ) ، ثم نوقع هاتين النقطتين على رسم الخط البياني للسلسلة ونوصل النقطتين بخط مستقيم يكون هو الخط المقدر للاتجاه العام للسلسلة ، وبمعرفة هاتين النقطتين تحسب معادلة الخط المستقيم هذا ( ص = أ + ب س ) من العلاقة :

$$\frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \text{ وبالضرب في } (س_١ - س_٢)$$

$$ص_١ - ص_٢ = \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢} (س_١ - س_٢)$$

لذلك فإن :

$$ص = \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢} (س - س_٢) + ص_٢ \quad (٩ - ٤)$$

$$= ص_٢ + (س - س_٢) \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢}$$

$$= ص_٢ + (س - س_٢) \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢}$$

$$= ص_٢ + س \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢}$$

حيث  $\bar{س}_1$  : متوسط المتغير الزمني للفترة الأولى .

$\bar{س}_2$  : متوسط الظاهرة للفترة الأولى .

$\hat{ب}$  : قيمة ب المقدرة .

$\hat{أ}$  : قيمة أ المقدرة .

مثال ( ٩ - ٢ ) :

السلسلة السابقة يمكن إيجاد معادلة الاتجاه العام لها باستخدام طريقة شبه المتوسطات كالاتي : —

السنوات (س)	المبيعات (ص)	
المجموعة الأولى		
١٩٧٣	١٤٢	
١٩٧٤	١٢٠	$\bar{س}_1 = ١٩٧٥$ ، $\text{مجم } س_1 = ٩٨٧٥$
١٩٧٥	١١٨	
١٩٧٦	١٣٢,٥	$\bar{س}_2 = ١٩٧٦,٥$ ، $\text{مجم } س_2 = ٦٥٦$
١٩٧٧	١٤٣,٥	
المجموعة الثانية		
١٩٧٨	١٧٠	
١٩٧٩	١٩٢,٥	$\bar{س}_3 = ١٩٨٠$ ، $\text{مجم } س_3 = ٩٩٠٠$
١٩٨٠	٢١١,٥	
١٩٨١	٢١٧	$\bar{س}_4 = ١٩٨١,٥$ ، $\text{مجم } س_4 = ٩٩٢$
١٩٨٢	٢٠١	

معادلة الاتجاه العام :

$$\text{ص} = \frac{(\bar{س}_2 - \bar{س}_1) \times (\bar{س}_1 - \bar{س}_2)}{(\bar{س}_2 - \bar{س}_1)} + \bar{س}_1$$

$$131,2 + (1975 - \text{س}) \times \left( \frac{131,2 - 198,4}{1975 - 1980} \right) =$$

$$131,2 + (1975 - \text{س}) \times \frac{67,2}{5} =$$

$$131,2 + (1975 - \text{س}) \times 13,44 =$$

$$131,2 + (13,44 \times 1975 - \text{س}) =$$

$$\text{س} = 13,44 - 26412,8$$

ملاحظات على طريقة شبه المتوسطات :

الطريقة سريعة في تقدير خط الاتجاه العام ونتائجها معقولة نوعاً ما ولا يختلف فيها اثنان إذا بدأ بنفس المجموعات . إذا كان عدد الفترات الزمنية فردياً وليس زوجياً كما كان الحال في المثال السابق فلإننا في العادة نأخذ مجموعتين متساويتين ونهمل المفردة التي في الوسط ( بين المجموعتين ) . ويعاب على هذه الطريقة تأثيرها بالقيم الشاذة إن وجدت في إحدى المجموعتين ( وذلك لأن الوسط الحسابي مقياس يتأثر بالقيم الشاذة ويكون مظللاً ) لذلك فإن من الأفضل استبعاد القيم الشاذة في هذه الطريقة . وهناك طرق أخرى لتقدير الاتجاه العام أفضل من طريقة شبه المتوسطات وهي طريقة المربعات الصغرى .

(٣) طريقة المربعات الصغرى في تقدير معادلة الاتجاه العام للسلاسل

الزمنية Least Square Method :

فكرة هذه الطريقة هي نفس فكرة إيجاد خط انحدار (ص) على (س) في دراستنا للاتحدار البسيط . حيث إننا هنا نوجد معادلة انحدار الظاهرة (ص) على الزمن (س) والمتمثلة بمعادلة الخط المستقيم :

$$\text{ص} = \text{أ} + \text{ب س}$$

وتقدر كل من قيم (أ، ب) باستخدام فكرة المربعات الصغرى والتي تهدف إلى تقدير لكل من (أ، ب) بحيث نحقق أقل مجموع للمربعات الخطأ {مج (ص - ض)<sup>2</sup>} حيث تقدر (ب) و (أ) كما سبق في الفصل الثامن من المعادلتين :

$$ب = \frac{ن \text{ مج ص ص} - (\text{مج ص}) (\text{مج ص})}{ن \text{ مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2} \quad (٩-٥)$$

$$أ = \frac{ص - ب ن}{ن} \quad (٩-٦)$$

في مثالنا السابق :

$$\begin{array}{rclcl} \text{مج ص ص} & = & ٣٢٥٩٨٦٢ & = & ن \\ \text{مج ص} & = & ١٩٧٧٥ & = & \text{مج ص}^2 \\ \text{مج ص} & = & ١٦٤٨ & = & \text{مج ص}^2 \\ ٢٨٤٨١٥ & = & & & \end{array}$$

$$ب = \frac{٣٢٥٩٨٦٢ \times ١٠ - (١٩٧٧٥)(١٦٤٨)}{١٩٧٧٥^2 - ٣٩١٠٥١٤٥ \times ١٠} = ١١,٤١٨٢$$

$$أ = ١٩٧٧,٥ - ١٦٤,٨ \times ١١,٤١٨٢ = -٢٢٤١٤,٦٥٥$$

∴ معادلة الاتجاه العام هي :

$$ض = ١١,٤١٨٢ ص - ٢٢٤١٤,٦٥٥$$

مثال (٩-٣) :

إذا كانت المبيعات من أجهزة التلفزيون الملون (ص) خلال الفترة ١٩٧٣ - ١٩٨١ هي :-

السنة (س)	المبيعات (ص)
١٩٧٣	٩٣٠٠
١٩٧٤	١٠٢٨٠
١٩٧٥	١٢٦٧٠
١٩٧٦	١٠٣٥٠
١٩٧٧	١٠٥٧٠
١٩٧٨	١٣٣٢٠
١٩٧٩	١٥٦٧٠
١٩٨٠	١٧٥٧٠
١٩٨١	١٦١٦٠
١٧٧٩٣	١١٥٨٩٠

$$\begin{aligned} \text{مجم س}^2 &= 35176821 & \text{مجم ص}^2 &= 1064376500 \\ \text{مجم س ص} &= 229172810 & \text{ن} &= 9 \end{aligned}$$

وبالتعويض في المعادلتين (٩-٥) ، (٩-٦) على الترتيب نجد أن :

$$\text{ب} = 971,333 \quad , \quad \text{أ} = 1907449,333$$

∴ معادلة الاتجاه العام الخطية هي :

$$\text{ص} = 971,333 \text{ س} - 1907449,333$$

تعتبر طريقة المربعات الصغرى من أدق طرق قياس الاتجاه العام ، فإذا كان شكل انتشار بيانات الظاهرة قريباً من صورة الخط المستقيم فلإننا نستطيع

تقريب العلاقة التي تربط الظاهرة المدروسة بالزمن من خلال الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم السابق ذكرها ومن ثم يمكن تحديد قيم الثوابت للمعادلة ( أ ، ب ) وتحديد القيم الاتجاهية (ص) واستخدامها في التنبؤ بقيم الظاهرة في المستقبل .

ويختلف حل المعادلات لإيجاد قيم كل من ( أ ، ب ) باختلاف قيم المتغير الذي يقيس الزمن . ففي كثير من الأحيان - خاصة إذا كانت الفترة الزمنية التي يبدأ عندها قياس السلسلة رقماً كبيراً كسنة ١٩٧٨ مثلاً - نلجأ إلى تعديل المتغير الزمني وذلك بطرح مقدار أو سنة معينة ( سنة الأساس ) من قيم المتغير الزمني بهدف تبسيط العمليات الحسابية . فإذا أخذنا سنة الأساس مثلاً أي سنة كانت بخلاف السنة الوسطى فتسمى طريقة الحساب بطريقة الانحرافات المطولة لحل المعادلات . أما إذا كانت سنة الأساس هي السنة الوسطى للسلسلة الزمنية ( أي التي تجعل مجرّس = صفراً ، حيث (ص) السنوات المعدلة بعد طرح سنة الأساس من السنوات الأصلية ) فتسمى بالطريقة المختزلة وفي هذه الحالة تظهر مشكلة ما إذا كان عدد السنوات فردياً أو زوجياً كما سيتضح من الأمثلة التالية والتي تعالج استخدام طريقة المربعات الصغرى في إيجاد معادلة الاتجاه العام الخطي .

مثال ( ٩ - ٤ ) :

الجدول التالي يوضح مقدار الاستثمارات في قطاع معين في المدة من ١٩٧٨ إلى ١٩٨٦ مقربة إلى مليون جنيه .

السنوات	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦
الاستثمار	٦٨	٥٠	٨١	١٠٥	١٠٠	١٠١	٩٨	٨٦	١٠٣



والمطلوب :

١ - ايجاد معادلة الاتجاه العام والقيم الاتجاهية .

٢ - التنبؤ بقيمة الاستثمار سنة ١٩٨٨ .

الحل :

١ - الطريقة المطولة ( سنة ١٩٧٨ كأساس ) :

السنة	الاستثمار (ص)	الانحرافات عن سنة الأساس (س)	س ص	س <sup>٢</sup>	القيم الاتجاهية ص
١٩٧٨	٦٨	صفر	صفر	صفر	٦٩,٤٨
١٩٧٩	٥٠	١	٥٠	١	٧٤,١١
١٩٨٠	٨١	٢	١٦٢	٤	٧٨,٧٤
١٩٨١	١٠٥	٣	٣١٥	٩	٨٣,٣٨
١٩٨٢	١٠٠	٤	٤٠٠	١٦	٨٨
١٩٨٣	١٠١	٥	٥٠٥	٢٥	٩٢,٦٣
١٩٨٤	٩٨	٦	٥٨٨	٣٦	٩٧,٩٦
١٩٨٥	٨٦	٧	٦٠٢	٤٩	١٠١,٨٩
١٩٨٦	١٠٣	٨	٨٢٤	٦٤	١٠٥,٥٢
المجموع	٧٩٢	٣٦	٣٤٤٦	٢٠٤	

$$ب = \frac{ن \text{ مج ص ص} - (\text{مج ص}) (\text{مج ص})}{ن \text{ مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2}$$

$$٤,٦٣ = \frac{٧٩٢ \times ٣٦ - ٣٤٤٦ \times ٩}{٣٦ \times ٣٦ - ٢٠٤ \times ٩}$$

$$أ = ح - ب س$$

$$٤ \times ٤,٦٣ - ٨٨ = \frac{٣٦}{٩} \times ٤,٦٣ - \frac{٧٩٢}{٩} =$$

$$٦٩,٤٨ =$$

∴ معادلة الاتجاه العام هي :

$$ح = أ + ب س$$

$$ح = ٤,٦٣ + ٦٩,٤٨ س$$

وبالتعويض عن قيم (س) صفر، ١، ٢، ...، ٨ نحصل على القيم الاتجاهية في العمود الأخير للجدول .

القيم الاتجاهية لحجم الاستثمار سنة ١٩٨٨ ( ينظرها س = ١٠ في الجدول )

$$١٠ \times ٤,٦٣ + ٦٩,٤٨ =$$

$$= ٤٦,٣٠ + ٦٩,٤٨ = ١١٥,٧٨ \text{ مليون جنيه .}$$

## ٢ - الطريقة المختزلة :

تستخدم هذه الطريقة لتبسيط العمليات الحسابية وتتمثل في محاولة جعل مج س = صفر وذلك بأخذ السنة الوسطى كأساس . وفي هذه الحالة تؤول قيم ثوابت معادلة الانحدار إلى :

$$ب = \frac{\text{مجم ح س}}{\text{مجم س}^2} \quad (٧-٩)$$

$$أ = \frac{\text{مجم ح س}}{ن} =$$

ونحصل على هذه النتيجة مباشرة بالتعويض عن مج س = صفر في المعادلتين (٩-٥) ، (٩-٦) على الترتيب .

وفي المثال السابق باختيار سنة ١٩٨٢ كأساس نحصل على الجدول

التالي :

السنة	الاستثمار (ص)	الانحرافات عن ١٩٨٢ (س)	س ص	ص <sup>٢</sup>	القيم الاتجاهية ص
١٩٧٨	٦٨	٤ -	٢٧٢ -	١٦	٦٩,٤٨
١٩٧٩	٥٠	٣ -	١٥٠ -	٩	٧٤,١١
١٩٨٠	٨١	٢ -	١٦٢ -	٤	٧٨,٧٤
١٩٨١	١٠٥	١ -	١٠٥ -	١	٨٣,٣٧
١٩٨٢	١٠٠	صفر	صفر	صفر	٨٨
١٩٨٣	١٠١	١	١٠١	١	٩٢,٦٣
١٩٨٤	٩٨	٢	١٩٦	٤	٩٧,٩٦
١٩٨٥	٨٦	٣	٢٥٨	٩	١٠١,٨٩
١٩٨٦	١٥٣	٤	٤١٢	١٦	١٥٥,٥٢
المجموع	٧٩٢		٢٧٨	٦٠	

$$ب = \frac{\text{مجموع س ص}}{\text{مجموع س}^2} = \frac{٢٧٨}{٦٠} = ٤,٦٣$$

$$أ = \frac{\text{مجموع ص}}{ن} = \frac{٧٩٢}{٩} = ٨٨$$

∴ معادلة الاتجاه العام هي :

$$\begin{aligned} \text{ص} &= أ + ب \text{ س} \\ \therefore \text{ص} &= ٨٨ + ٤,٦٣ \text{ س} \end{aligned}$$

وبالتعويض عن قيم (س) المختلفة نحصل على القيم الاتجاهية بالعمود الأخير ويلاحظ أنها تطابق نفس النتائج التي حصلنا عليها بالطريقة المطولة .  
والقيمة الاتجاهية للاستثمار سنة ١٩٨٨ ( ينظرها س = ٦ في هذه الحالة )

$$6 \times 4,63 + 88 =$$

$$27,78 + 88 = 115,78 \text{ مليون جنيه}$$

وهي نفس النتيجة السابقة .

ملاحظة هامة :

إذا كان عدد السنوات زوجياً فإن نقطة الأساس يجب أن تكون بين الستين المتوسطتين حتى يكون مجد س = صفراً .

والمثال التالي يوضح كيفية استخدام الطريقة المختزلة إذا كان عدد السنوات زوجياً .

مثال ( ٩ - ٥ ) :

الجدول التالي يوضح حجم الاستثمارات في قطاع معين في الفترة من ١٩٧٨ - ١٩٨٧ مصرية بالمليون جنيه والمطلوب إيجاد معادلة الاتجاه العام ثم أوجد القيم الاتجاهية ومن ثم حدد أثر التغيرات الموسمية والعشوائية والدورية .

السنوات	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦	٨٧	المجموع
الاستثمار	٦٨	٥٠	٨١	١٠٥	١٠٠	١٠	٩٨	٨٦	١٠٣	١٠٨	٩٠٠

الحل : بأخذ سنة الأساس في منتصف سنة ١٩٨٣/٨٢ والضرب من (٢)  
نحصل على قيم س من الجدول التالي :

السنوات	الاستثمار ص	ص	ص	القيم الانتاجية ص	اثر الموسم والعشوائية والدورية
١٩٧٨	٦٨	٩-	٦١٢-	٦٩,٩٣	٩٧,٢٤
١٩٧٩	٥٠	٧-	٣٥٠-	٧٤,٣٩	٦٧,٢١
١٩٨٠	٨١	٥-	٤٠٥-	٧٨,٨٥	١٠٢,٧٣
١٩٨١	١٠٥	٣-	٣١٥-	٨٣,٣١	١٢٦,٠٤
١٩٨٢	١٠٠	١-	١٠٠-	٨٧,٧٧	١١٣,٩٣
١٩٨٣	١٠١	١	١٠١	٩٢,٢٣	١٠٩,٥١
١٩٨٤	٩٨	٣	٢٩٤	٩٦,٦٩	١٠١,٣٥
١٩٨٥	٨٦	٥	٤٣٠	١٠١,١٥	٨٥,٠٢
١٩٨٦	١٠٣	٧	٧٣١	١٠٥,٦١	٩٧,٥٣
١٩٨٧	١٠٨	٩	٩٧٢	١١٠,٠٧	٩٨,١٢
المجموع	٩٠٠	صفر	٧٣٦	٣٣٠	

$$٢,٢٣ = \frac{٧٣٦}{٣٣٠} = \frac{\text{مجد ص}}{\text{مجد ص}} = \text{ب}$$

$$٩٠ = \frac{٩٠٠}{١٠} = \frac{\text{مجد ص}}{\text{ن}} = \text{ا}$$

∴ معادلة الاتجاه العام هي :

$$\text{ص} = \text{ا} + \text{ب ص}$$

$$\text{ص} = ٩٠ + ٢,٢٣ \text{ ص}$$

ملاحظة : اثر التغيرات الموسمية والعشوائية والدورية

$$١٠٠ \times \frac{\text{القيم الأصلية ص}}{\text{القيم الانتاجية ص}} =$$

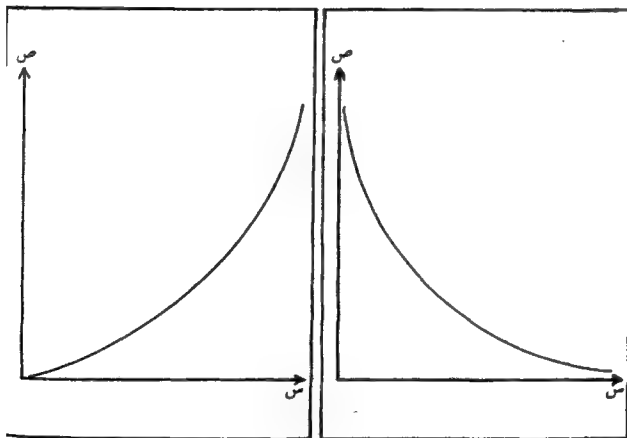
الاتجاه العام في صورة دالة أسية ( باستخدام طريقة المربعات الصغرى ) :

تستخدم الدالة الأسية لمنحنى انحدار بين المتغير المستقل (س) والمتغير التابع (ص) إذا كان الاتجاه العام ينمو بنسبة ثابتة لكل قيم المتغير المستقل ( مثلاً ٢٠٪ كل سنة) فإذا كانت القيمة ١٠٠ في السنة الأولى ، ففي السنة الثانية  $100 + (100 \times \frac{20}{100}) = 120$  وفي السنة الثالثة  $120 + 24 = 144$  . . . وهكذا ، فالفرق بين السنة الثانية والأولى :  $120 - 100 = 20$  ، وبين السنة الثالثة والثانية  $144 - 120 = 24$  ، وهكذا الفرق يزداد أو ينقص على حسب اتجاه التغير في الاتجاه العام . ولكن الفرق لا يكون ثابتاً كما هو الحال في خط الانحدار الخطي .

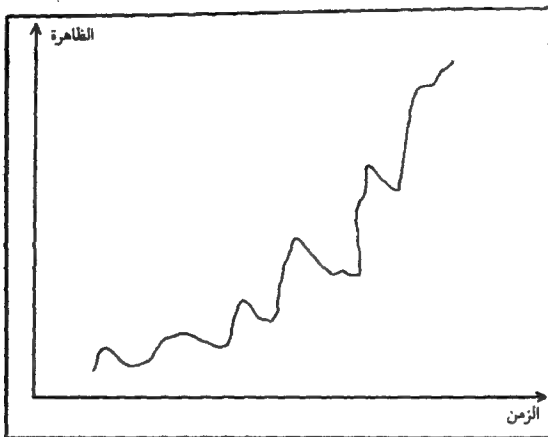
والشكل العام لمنحنى الدالة الأسية يأخذ أحد الشكلين الآتيين :

شكل (٩-٦)

شكل (٩-٥)



وتأخذ السلسلة الزمنية التي يأخذ الاتجاه العام فيها شكل الدالة الأسية شكلاً كالآتي :



( شكل ٧-٩ )

الصورة العامة للدالة الأسية :

$$ص = أ(ب)^س$$

ويمكن كتابتها على صورة خطية بأخذ لوغاريتم الطرفين كالتالي :

$$لو١ ص = لو١ أ + س(لو١ ب)$$

ويوضع  $ص' = لو١ ص$  ،  $أ' = لو١ أ$  ،  $ب' = لو١ ب$  . يمكن كتابة

المعادلة على الصورة الخطية المعروفة :

$$ص' = أ' + س ب'$$

حيث (  $أ'$  ،  $ب'$  ) ، لهما نفس المعنى الذي ذكرناه عند كلامنا عن خط

انحدار (ص) على (س) .

ومن ثم نستطيع ايجاد (أ) و (ب') باستخدام طريقة المربعات الصغرى والبيانات المتوفرة عن (ص') و (س') . ولإيجاد قيمة (أ) من (أ') و (ب) من (ب') نستخدم العلاقة :  $أ = ١٠$  ،  $ب = ١٠$

(مثال (٩ - ٦) :

الأرقام التالية تمثل الانتاج الكلي لإحدى المصانع مقاساً بالآلاف وحدة .

السنة (س)	وحدة الانتاج (ص)	لو. ص = ص'
١٩٧١	٢١٠	٢,٣٢٢٢
١٩٧٢	٢٥٠	٢,٣٩٧٩
١٩٧٣	٢٦٠	٢,٤١٥٠
١٩٧٤	٢٤٠	٢,٣٨٠٢
١٩٧٥	٣٠٠	٢,٤٧٧١
١٩٧٦	٣١٠	٢,٤٩١٤
١٩٧٧	٣٣٠	٢,٥١٨٥
١٩٧٨	٣٨٠	٢,٥٧٩٨
١٩٧٩	٤٧٠	٢,٦٧٢١
١٩٨٠	٥٣٠	٢,٧٢٤٣
١٩٨١	٥٦٠	٢,٧٤٨٢

والمطلوب :

- (١) ايجاد معادلة خط الاتجاه العام والتي على الصورة  $ص = أ ب س$
- (٢) استخدام المعادلة في تقدير قيمة الانتاج الكلي سنة ١٩٧٥ ثم حدد مقدار الخطأ في التقدير .



الحل :

$$\begin{aligned} \text{مجد ص}^1 &= 21736 & \text{مجد ص}^2 &= 42950446 \\ \text{مجد ص}^1 &= \text{مجد (لو. ص)} = 27,7267 & \text{مجد ص}^2 &= \text{مجد (لو. ص)} = 70,0959 \\ \text{مجد ص}^1 &= 54792,5789 & \text{مجد ص}^2 &= 2,5206, \text{ ص} = 1976 \end{aligned}$$

$$\text{ب/} = \frac{\text{ن مجد ص}^1 - (\text{مجد ص}) (\text{مجد ص}^2)}{\text{ن مجد ص}^2 - (\text{مجد ص})} = 0.4220,$$

$$\text{أ} = \text{ص} - \text{ب ص} = 80,9578 -$$

$$\frac{81 - 80,958}{10 \times 1,1020} = (10) = \text{أ}$$

$$\text{ب} = 1,1022$$

$$\therefore \text{ض}^1 = 0.422, \text{ ص} = 80,9582$$

أو

$$\text{ض} = (\text{ص}^1 - 10 \times 1,1020) (1,1022) \text{ ص}$$

لإيجاد قيمة (ص) المتنبأ بها لسنة ١٩٧٥ مثلاً .

$$\text{ض}^1 = 80,9578 - (1975) 0.422$$

$$2,4784 = 80,9578 - 83,4362 =$$

$$\therefore \text{ض} = 300,8581 = 2.4784 - 10$$

وحيث أن القيمة الأصلية للإنتاج الكلي سنة ١٩٧٥ = 300

$\therefore$  مقدار الخطأ في التقدير = القيمة الأصلية - القيمة المقدرة

$$= -8581,$$

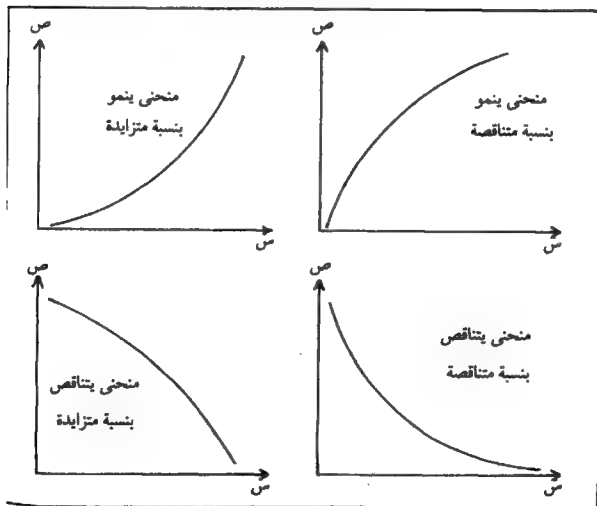
الاتجاه العام كمعادلة من الدرجة الثانية - طريقة المربعات الصغرى :

في بعض التطبيقات لا يمكن افتراض معادلة الخط المستقيم لتمثيل الاتجاه العام للظاهرة ولذلك فمن الضروري استخدام معادلة المنحنى من الدرجة الثانية أو الثالثة أو . . . . لوصف بيانات مثل هذه الظواهر .

وسوف يقتصر تحليلنا في هذا المجال على المنحنى من الدرجة الثانية . فمن المعلوم أن الصورة العامة لمعادلة المنحنى من الدرجة الثانية هي :

$$ص = أ + ب س + ج س^2 \quad (٨-٩)$$

ويوضح شكل ( ٨ - ٩ ) أشكالاً مختلفة لمنحنيات من الدرجة الثانية .



شكل ( ٨ - ٩ )

وواضح انها معادلة في ثلاثة مجاهيل ، ولكي نحصل على تقدير  $\bar{A}$  ،  
ب ، ج فيلزم حل المعادلات الآتية :

$$\text{مجد ص} = \text{ن أ} + \text{ب مج ص} + \text{ج مج ص}^2$$

$$\text{مجد ص ص} = \text{أ مج ص} + \text{ب مج ص}^2 + \text{ج مج ص}^3 \quad (9 - 9)$$

$$\text{مجد ص}^2 \text{ ص} = \text{أ مج ص}^2 + \text{ب مج ص}^3 + \text{ج مج ص}^4$$

وباستخدام الطريقة المختزلة السابق شرحها ( بجعل مج ص = صفر )  
يمكن تقليل العمليات الحسابية وتصبح المعادلات السابقة على الصورة .

$$\text{مجد ص} = \text{ن أ} + \text{ج مج ص}^2$$

$$\text{مجد ص ص} = \text{ب مج ص}^2 \quad (9 - 10)$$

$$\text{مجد ص}^2 \text{ ص} = \text{أ مج ص}^2 + \text{ج مج ص}^4$$

وعليه لحل هذه المعادلات يلزم ايجاد مج ص ، مج ص<sup>2</sup> ص ،  
مجد ص ص ، مج ص<sup>2</sup> ، مج ص<sup>4</sup> كما يتضح في المثال التالي :

مثال ( ٩ - ٧ ) :

الجدول التالي يوضح حجم الاستثمارات بالمليون جنيه في  
قطاع معيّن في الملة من ١٩٧٨ إلى ١٩٨٦ والمطلوب تقدير معادلة  
الاتجاه العام بافتراض منحني من الدرجة الثانية . ثم حدد القيم  
الاتجاهية .

السنوات	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦
الاستثمارات	٦٨	٥٠	٨١	١٠٥	١٠٠	١٠١	٩٨	٨٦	١٠٣

الحل :

السنوات	الاستثمارات ص	س	س <sup>١</sup> ص	س <sup>٢</sup> ص	س <sup>٣</sup> ص	القيم الانجائية ص
١٩٧٨	٦٨	٤-	٢٧٢-	١٦	١٠٨٨	٥٧,٤٤
١٩٧٩	٥٠	٣-	١٥٠-	٩	٤٥٠	٧١,١٠
١٩٨٠	٨١	٢-	١٦٢-	٤	٣٢٤	٨٢,١٨
١٩٨١	١٠٥	١-	١٠٥-	١	١٠٥	٩٠,٦٨
١٩٨٢	١٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر	٩٦,٦٠
١٩٨٣	١٠١	١	١٠١	١	١٠١	٩٩,٩٤
١٩٨٤	٩٨	٢	١٩٦	٤	٣٩٢	١٠٠,٧٠
١٩٨٥	٨٦	٣	٢٥٨	٩	٧٧٤	٩٨,٨٨
١٩٨٦	١٠٣	٤	٤١٢	١٦	١٦٤٨	٩٤,٤٨
المجموع	٧٩٢	صفر	٢٧٨	٦٠	٤٨٨٢	٧٠٨

بالتعويض في المعادلات (٩ - ١٠) نحصل على

$$ب = \frac{\text{مجد س ص}}{\text{مجد س}^2} = \frac{٢٧٨}{٦٠} = ٤,٦٣$$

$$(١) \quad ٧٩٢ = ٩ + ٦٠ \text{ ج}$$

$$(٢) \quad ٤٨٨٢ = ٦٠ + ٧٠٨ \text{ ج}$$

وبحل المعادلتين في (أ، ج) نجد من (١) أن :

$$(٣) \quad ٨٨ = ٢٠ - \frac{٢٠}{٣} \text{ ج}$$

وبالتعويض في (٢)

$$٤٨٨٢ = ٥٢٨٠ - ٤٠٠ \text{ ج} + ٧٠٨ \text{ ج}$$

$$٣٠٨ \text{ ج} = - ٣٩٨$$

$$\therefore \text{ج} = - ١,٢٩$$

وبالتعويض في (٣) نجد أن :  $٩٦,٦ = ١$

∴ معادلة الاتجاه العام هي :

$$\hat{y} = ٩٦,٦ + ٤,٦٣ x - ١,٢٩ x^2$$

وبالتعويض عن قيم (س) نحصل على القيم الاتجاهية في العمود الأخير بالجدول .

(٤) المتوسطات المتحركة :

تمهيد :

الوسط الحسابي لعدة قيم هي القيمة الناشئة من قسمة مجموع هذه القيم على عددها ، وهي قيمة تلخص البيانات برقم واحد وتزيل التذبذبات الناشئة فيها ، فمثلاً إذا كانت لدينا البيانات التالية : -

$$س = ١١٠ ، ٣ ، ٥١$$

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{١٦٤}{٣} = ٥٤,٦٧$$

لذلك فإننا نستخدم الوسط الحسابي في طريقة المتوسطات المتحركة لإزالة المرتفعات والمنخفضات ( الناشئة من التغيرات الموسمية والعرضية والدورية ) من السلسلة الزمنية ، والحصول على سلسلة زمنية جديدة خالية من التغيرات السابقة .

تعريف المتوسطات المتحركة :

المتوسطات المتحركة لسلسلة زمنية هي سلسلة زمنية مشتقة من السلسلة الزمنية الأصلية ، حيث تكون القيمة لفترة زمنية معينة في هذه السلسلة مساوية للوسط الحسابي للقيمة المناظرة في السلسلة الأصلية وبعض القيم الأصلية السابقة واللاحقة لها .

وتستخدم هذه الطريقة لإزالة التغيرات الموسمية والعرضية والدورية والحصول على سلسلة زمنية تحتوي على اتجاه عام فقط ولكن ليس بالضرورة أن يكون في صورة خطية .

لذلك فإن هذه الطريقة لا تحدد لنا الاتجاه العام بصورة علاقة رياضية يمكن استخدامها فيما بعد في التنبؤ ولكن الذي نحصل عليه هو سلسلة تحتوي على هذا المتغير فقط .

لحساب المتوسطات المتحركة نبدأ أولاً بتحديد الفترة المناسبة لأخذ متوسطات البيانات ، وهذه تعتمد على طول دورة المتغير المراد إزالتها وعلى طول الفترة المقاسة فيها البيانات الأصلية . لإزالة التغيرات الموسمية والمتغيرات العشوائية من سلسلة زمنية مقاسة بالأشهر فمن الممكن أن تكون فترة المتوسطات ١٢ شهراً مثلاً وإذا كانت البيانات مقاسة ربع سنوياً فمن الممكن أن يكون طول الفترة أربعة أرباع سنوية وهكذا ، وذلك لأن التغيرات الموسمية تحدث خلال فترة زمنية مقدارها في العادة سنة . أما التغيرات الدورية فطول فترة دورتها تكون في العادة أكبر من سنة وتعتمد على نوع الظاهرة المدروسة ، لذلك يجب أن نجرب عدة فترات ونختار أنسب الأطوال لإزالة التغيرات الدورية ، ( وعند إزالة التغيرات الدورية بطريقة المتوسطات المتحركة تزال التغيرات الموسمية والعرضية معها تلقائياً ) ، وطول هذه الفترات يعتمد كما ذكرنا سابقاً على طول فترة قياس البيانات الأصلية وعلى طول الدورة الاقتصادية للظاهرة المدروسة .

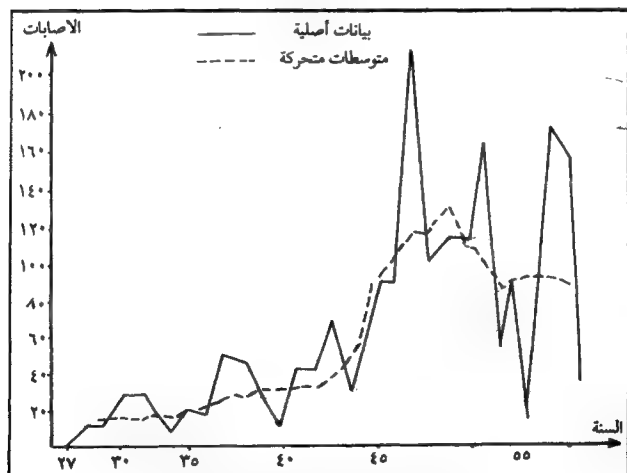
بعد تحديد طول الفترة المناسبة للمتوسطات المتحركة (وليكن طولها  $n$ ) نبدأ بحساب المتوسط المتحرك المقابل لكل فترة زمنية من فترات السلسلة وذلك بحساب متوسط فترة من السلسلة الأصلية يكون مركزها الفترة الزمنية المعنية .

مثال ( ٩ - ٨ ) :

الجدول التالي يمثل عدد اصابات المسافرين بالطائرات في إحدى الدول ، والمتوسط المتحرك لخمس سنوات .

السنة	اصابات حوادث الطيران	مجموع متحرك لخمس سنوات	متوسط متحرك لخمس سنوات
١٩٢٧	١	—	—
١٩٢٨	١٤	—	—
١٩٢٩	١٤	٧٨	١٥,٦
١٩٣٠	٢٤	٩٦	١٩,٢
١٩٣١	٢٥	٩٠	١٨,٠
١٩٣٢	١٩	٩٣	١٨,٦
١٩٣٣	٨	٨٤	١٦,٨
١٩٣٤	١٧	١٠٣	٢٠,٦
١٩٣٥	١٥	١٢٤	٢٤,٨
١٩٣٦	٤٤	١٤١	٢٨,٢
١٩٣٧	٤٠	١٣٣	٢٦,٦
١٩٣٨	٢٥	١٥٣	٣٠,٦
١٩٣٩	٩	١٤٤	٢٨,٨
١٩٤٠	٣٥	١٥٩	٣١,٨
١٩٤١	٣٥	١٥٦	٣١,٢
١٩٤٢	٥٥	١٩٥	٣٩,٠
١٩٤٣	٢٢	٢٣٦	٤٧,٢
١٩٤٤	٤٨	٢٧٦	٥٥,٢
١٩٤٥	٧٦	٤٢٠	٨٤,٠
١٩٤٦	٧٥	٤٨١	٩٦,٢
١٩٤٧	١٩٩	٥٢٩	١٠٥,٨
١٩٤٨	٨٣	٥٤٩	١٠٩,٨

السنة	اصابات حوادث الطيران	مجموع متحرك لخمس سنوات	متوسط متحرك لخمس سنوات
١٩٤٩	٩٦	٦١٦	١٢٣,٢
١٩٥٠	٩٦	٤٦٣	٩٢,٦
١٩٥١	١٤٢	٤٦٦	٩٣,٢
١٩٥٢	٤٦	٣٨٦	٧٧,٢
١٩٥٣	٨٦	٤٤٦	٨٩,٢
١٩٥٤	١٦	٤٤٧	٨٩,٤
١٩٥٥	١٥٦	٤٣٣	٨٦,٦
١٩٥٦	١٤٣	—	—
١٩٥٧	٣٢	—	—



شكل ( ٩ - ٩ ) السلسلة الزمنية لاصابات حوادث الطيران  
مع سلسلة المتوسطات المتحركة بخمس سنوات .



فإذا قررنا أن أنسب طول لحساب المتوسطات المتحركة هو ٥ (خمس سنوات هنا) فلحساب المتوسط المتحرك لسنة ١٩٢٩ نجعل بيانات السنوات ١٩٢٧ - ١٩٣١ ثم نقسمها على ٥ أي أن :

$$\text{المتوسط المتحرك} = \frac{١ + ١٤ + ٢٤ + ٢٥ + ٧٨}{٥} = ١٥,٦$$

يكون مركزها سنة ١٩٢٩ ( السنة المتوسطة ) ، ولسنة ١٩٣٠ نحسب المجموع المتحرك وذلك بطرح القيمة المقابلة لسنة ١٩٢٧ من المجموع المتحرك السابق (٧٨) ثم نضيف إليه القيمة المقابلة للسنة التالية (١٩٣٢) وهي ١٩ لنحصل على المجموع المتحرك التالي ويساوي ٩٦ وبذلك فإن المتوسط المتحرك الجديد يساوي  $\frac{٩٦}{٥} = ١٩,٢$  ومركزه سنة ١٩٣٠ (السنة الوسطى بين ١٩٢٨ - ١٩٣٢) وهكذا .

وبالنسبة لسنة ١٩٢٧ ، وسنة ١٩٢٨ في البداية وسنتي ١٩٥٦ ، ١٩٥٧ في نهاية السلسلة لا نستطيع حساب متوسط متحرك لهم وذلك لعدم وجود خمس قيم يكون مركزها السنة المطلوبة .

لذلك فإنه باستخدام هذه الطريقة نفقد بعض المعلومات عن بعض السنوات ( تعتمد في عددها على طول فترة المتوسطات المتحركة ) .  
القيمة الناشئة في السلسلة الجديدة ( سلسلة المتوسطات المتحركة ) هي سلسلة للقيمة الاتجاهية بعد إزالة كل من التغيرات الموسمية ، العرضية والدورية .

طول فترة المتوسطات المتحركة إذا كان زوجياً :

إذا كان طول فترة المتوسطات المتحركة زوجياً كأن يكون ٤ في مثالنا السابق فإن المتوسط المتحرك لأربع سنوات ( أو أي قيمة زوجية ) تكون قيمة تقع بين سنتين في المركز لذلك نأخذ المتوسط الحسابي لوسطين متحركين ثم نضعه أمام السنة التي تكون مركز هاتين القيمتين .

السنة	القيم	مجموع متحرك لأربع سنوات	المتوسط المتحرك (غير المركزي)	المتوسط المتحرك (المركزي)
١٩٢٧	١			—
١٩٢٨	١٤			—
١٩٢٩	١٤	٥٣	١٣,٢٥	$١٦,٢٥ = \frac{٣٢,٥}{٢}$
١٩٣٠	٢٤	٧٧	١٩,٢٥	$١٩,٨٨ = \frac{٣٩,٧٥}{٢}$
١٩٣١	٢٥	٨٢	٢٠,٥٠	—
١٩٣٢	١٩			—

وهكذا.....

وطريقة المتوسطات المتحركة على الرغم من أنها مفيدة تحت بعض الشروط إلا أنها تحمل بعض العيوب منها فقد بعض القيم في بداية ونهاية سلسلة المتوسطات المتحركة وانها تحتاج إلى عمليات حسابية طويلة وأهم من ذلك أنها لا تعطي الاتجاه العام في صورة معادلة رياضية يمكن استخدامها في عمليات التنبؤ المستقبلي . ولكننا درسنا هذه الطريقة لأهميتها في حساب بعض الطرق الحسابية في تقدير بعض المكونات الأخرى في السلاسل الزمنية .

تخليص السلسلة الزمنية من أثر الاتجاه العام :

بعد أن أوجدنا تقديراً للاتجاه العام لكل فترة زمنية في السلسلة الأصلية يمكن إزالة أثر الاتجاه العام من هذه السلسلة وذلك بقسمة السلسلة على القيمة الاتجاهية التي حصلنا عليها { على افتراض أن النموذج الذي لدينا هو

نموذج الضرب أي أن (ص = ت × م × د × ع) { فنحصل على أثر التغيرات الموسمية والدورية والعرضية

$$= \frac{ت \times م \times د \times ع}{ت} = م \times د \times ع$$

وهي سلسلة مكونة من التغيرات الموسمية والعرضية والدورية .

فمثلاً لسنة ١٩٢٩ في مثال (٩ - ٨) نجد أن

$$أثر التغيرات الموسمية والدورية والعرضية = \frac{١٤}{١٥,٦} = ٩٠\%$$

وهذا يعني أن التغيرات الدورية والموسمية والعرضية معاً تقلل قيمة الاتجاه بمقدار ١٠٪ أو أن القيمة الفعلية هي ٩٠٪ من القيمة الاتجاهية وذلك لأثر المكونات الثلاثة الأخرى (القيمة الاتجاهية محسوبة بطريقة المتوسطات المتحركة).

ولسنة ١٩٣٠ نجد أن أثر التغيرات الثلاثة =  $\frac{٢٤}{١٩,٢} = ١,٢٥$  وتعني أن التغيرات الثلاثة زادت من أثر الاتجاه العام بمقدار ٢٥٪. وهكذا .

## ثانياً : قياس التغيرات الموسمية

(Measuring Seasonal Variation)

هناك عدة طرق لقياس التغيرات الموسمية من أهمها : —

- (١) طريقة المتوسطات البسيطة .
- (٢) طريقة نسبة القيم الأصلية إلى المتوسطات المتحركة .

## (١) طريقة المتوسطات البسيطة :

وتتلخص هذه الطريقة في ايجاد الوسط الحسابي للفترات الموسمية في كل السنوات ومن الوسط الحسابي لكل فترة موسمية نوجد الوسط الحسابي العام لجميع الفترات ومن ثم نوجد الرقم القياسي الموسمي ( والذي يعبر عن نسبة الزيادة أو النقصان في الاتجاه العام نتيجة للمتغيرات الموسمية ) وذلك بنسبة متوسط كل فترة إلى المتوسط العام ، وبذلك فإن الوسط الحسابي للأرقام القياسية الموسمية يكون واحداً صحيحاً ( أو ١٠٠ ان كان في صورة نسبة) أي أن محصلة التغيرات الموسمية تتلاشى في آخرها في المحصلة العامة السنوية . فمثلاً إذا كانت البيانات ربع سنوية فيمكن حساب الرقم القياسي الموسمي لكل موسم باتباع الخطوات الآتية : —

١ — نوجد المجموع السنوي لكل ربع من الأرباع (المجموع السنوي يعني مجموع الأرباع المتناظرة في السنوات المختلفة).

٢ — نوجد الوسط الحسابي لكل ربع من الأرباع .

٣ — حساب الوسط الحسابي العام والذي يحسب كوسط حسابي لمتوسطات الأرباع .

٤ — يحسب الرقم القياسي الربع سنوي على أساس نسبة متوسط كل ربع إلى متوسط المتوسطات ( الوسط العام ) ويسمى هذا الرقم بالدليل الموسمي ، ويكون في صورة نسبة مئوية .

مثال ( ٩ — ٩ ) :

البيانات الآتية تمثل المبيعات الربع سنوية لإحدى المؤسسات مقاسة بالآلاف دينار والمطلوب حساب الرقم القياسي الموسمي بطريقة المتوسطات البسيطة .

السنة	الربع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
١٩٧٨		٤٧,٢٥	٥٧,٧٥	٤٥,٥	٣٥
١٩٧٩		٤٦,٨	٦١,٢	٤٥	٣٧,٨
١٩٨٠		٤٣,٧	٥٧	٤٧,٥	٣٤,٢
١٩٨١		٥٠,٤	٦٧,٢	٥٠,٤	٣٥,٧
١٩٨٢		٦٤,٨	٧٦,٨	٥٧,٦	٤٨
المجموع		٢٥٢,٩٥	٣١٩,٩٥	٢٤٦	١٩٠,٧
المتوسط		٥٠,٥٩	٦٣,٩٩	٤٩,٢	٣٨,١٤
الرقم القياسي الموسمي		١	١,٢٧	٠,٩٧	٠,٧٦

$$\frac{٣٨,١٤ + ٤٩,٢ + ٦٣,٩٩ + ٥٠,٥٩}{٤} = \text{المتوسط العام}$$

$$٥٠,٤٨ = \frac{٢٠١,٩٢}{٤} =$$

$$١,٠٠٢ = \frac{٥٠,٥٩}{٥٠,٤٨} = \text{الرقم الموسمي للربع الأول}$$

$$١,٢٧ = \frac{٦٣,٩٩}{٥٠,٤٨} = \text{الرقم الموسمي للربع الثاني}$$

$$٠,٩٧ = \frac{٤٩,٢}{٥٠,٤٨} = \text{الرقم الموسمي للربع الثالث}$$

$$٠,٧٦ = \frac{٣٨,١٤}{٥٠,٤٨} = \text{الرقم الموسمي للربع الرابع}$$

ويعني الرقم الموسمي للربع الثاني مثلاً أن مبيعات هذه المؤسسة تتأثر موسمية تؤدي إلى زيادة المبيعات بمقدار ٢٧٪ من القيمة الاتجاهية . بينما في الربع الثالث تؤدي الموسمية إلى انخفاض في القيمة الاتجاهية قدره ٣٪ .

ملاحظة :

$$١ = \frac{٠,٧٦ + ٠,٩٧ + ١,٢٧ + ١}{٤} = \text{متوسط الأرقام الموسمية}$$

ويعني هذا أن الموسمية يتلشى أثرها خلال السنة وتعود لتكرر نفسها مرة أخرى في السنوات الأخرى . أو أن محصلة أثر الموسمية يُبطل بعضها البعض خلال مرور السنة .

(٢) طريقة نسبة القيم الأصلية إلى المتوسطات المتحركة :

تعتبر طريقة تقدير الموسمية بنسبة القيم الأصلية للسلسلة الزمنية إلى متوسطاتها المتحركة أفضل وأكثر الطرق البسيطة استخداماً في هذا المجال . فإذا كانت لدينا سلسلة زمنية مقاسة بفترات زمنية أقل من سنة كأن تكون هذه الفترات « أيام ، أسابيع ، أشهر ، أرباع سنة ( ٣ أشهر ) وهكذا . . . » فإن التغيرات الموسمية تظهر في هذه السلسلة وتؤثر عليها . لقياس تأثير التغيرات الموسمية في مثل هذه السلسلة نلجأ أولاً إلى تخلص هذه السلسلة من أثر التغيرات الموسمية باستخدام المتوسطات المتحركة (بفترة زمنية تساوي سنة من أطوال الفترات للسلسلة الأصلية)، وإزالة هذا المتغير بالمتوسطات تزال كذلك التغيرات العشوائية لنحصل على سلسلة زمنية بالمتوسطات المتحركة والتي تشمل أثر متغيرين هما الاتجاه العام والتغيرات الدورية .

ويفرض اننا نتعامل مع نموذج الضرب (الأكثر شيوعاً) فإن قسمة السلسلة الأصلية على سلسلة المتوسطات المتحركة تعطينا سلسلة أخرى

جديدة خالية من أثر الاتجاه العام والتغيرات الدورية وتشمل أثر متغيرين فقط هما التغيرات الموسمية والتغيرات العشوائية .

ولتقدير أثر الموسمية في هذه السلسلة نلجأ إلى أخذ الوسط الحسابي للقيم المتناظرة ( في الفترة الزمنية خلال السنة ) من السلسلة الجديدة ، لنحصل بذلك على تقدير لأثر الموسمية في هذا الفصل من السنة . يكون هذا التقدير في صورة نسبة مئوية من الاتجاه العام . ولأن أثر التغيرات الموسمية يتلاشى في المحصلة السنوية لذلك فإن مجموع أثر الموسمية يجب أن يكون مساوياً لعدد الفترات الموسمية ، أو بمعنى آخر ان متوسط مجموع أثر الموسمية خلال سنة يجب أن يكون واحداً صحيحاً ،

لهذا فالحصول على الرقم القياسي الموسمي ( الدليل الموسمي ) لكل موسم نقسم الأثر الموسمي لكل فصل على مجموع أثر الفصول خلال سنة .

نموذج الضرب :  $ص = ت \times م \times د \times ع$

سلسلة المتوسطات المتحركة :  $ص = ت \times د$

حاصل قسمة السلسلة الأصلية على سلسلة المتوسطات المتحركة : -

$$ص = \frac{ت \times م \times د \times ع}{ت \times د} = م \times ع$$

مثال ( ٩ - ١٠ ) :

من بيانات المثال السابق للمبيعات الربع سنوية. لإحدى المؤسسات مقاسة بالآلف دينار .

أوجد الرقم القياسي الموسمي باستخدام طريقة نسبة القيم الأصلية إلى المتوسطات المتحركة .

الحصل : الجدول التالي يلخص خطوات الحل :

السنة	الربع	(س)	(ص) المبيعات	المجموع المتحرك	المتوسط المتحرك	ت × د المتوسط المتحرك	ع × م القيم الأصلية المتوسط المتحرك
١٩٧٨	١	١	٤٧,٢٥				—
	٢	٢	٥٧,٧٥				—
				١٨٥,٥	٤٦,٣٧٥		
	٣	٣	٤٥,٥			٤٦,٣١٨٨	٠,٩٨٢٣
				١٨٥,٠٥	٤٦,٢٦٢٥		
	٤	٤	٣٥,٠٠			٤٦,٦٩٣٨	٠,٧٤٩٦
				١٨٨,٥	٤٧,١٢٥		
١٩٧٩	١	٥	٤٦,٨			٤٧,٠٦٢٥	٠,٩٩٤٤
				١٨٨	٤٧,٠٠		
	٢	٦	٦١,٢			٤٧,٣٥	١,٢٩٢٥
				١٩٠,٨	٤٧,٧٠		
	٣	٧	٤٥,٠٠			٤٧,٣١٢٥	٠,٩٥١١
				١٨٧,٧	٤٦,٩٢٥		
	٤	٨	٣٧,٨			٤٦,٤	٠,٨١٤٧
				١٨٣,٥	٤٥,٨٧٥		
١٩٨٠	١	٩	٤٣,٧			٤٦,١٨٧٥	٠,٩٤٦١
				١٨٦,٠٠	٤٦,٥٠		
	٢	١٠	٥٧,٠٠			٤٦,٠٥	١,٢٣٧٨
				١٨٢,٤٠	٤٥,٦٠		
	٣	١١	٤٧,٥			٤٦,٤٣٧٥	١,٠٠٢٩
				١٨٩,١٠	٤٧,٢٧٥		



السنة	الربع	(س)	(ص)	المجموع المتحرك	المتوسط المتحرك	المتوسط المتحرك للمركز	م × د القيم الأصلية المتوسط المتحرك
	٤	١٢	٣٤,٢			٤٨,٥٥	٠,٧٠٤٤
				١٩٩,٣٠	٤٩,٨٢٥		
١٩٨١	١	١٣	٥٠,٤			٥٠,١٨٧٥	١,٠٠٤٢
				٢٠٢,٢	٥٠,٥٥		
	٢	١٤	٦٧,٢			٥٠,٧٣٧٥	١,٣٢٤٥
				٢٠٣,٧٠	٥٠,٩٢٥		
	٣	١٥	٥٠,٤			٥٢,٧٢٥	٠,٩٥٥٩
				٢١٨,١	٥٤,٥٢٥		
	٤	١٦	٣٥,٧			٥٥,٧٢٥	٠,٦٤٠٦
				٢٢٧,٧	٥٦,٩٢٥		
١٩٨٢	١	١٧	٦٤,٨			٥٧,٨٢٥	١,١٢٠٦
				٢٣٤,٩٠	٥٨,٧٢٥		
	٢	١٨	٧٦,٨			٦٠,٢٦٢٥	١,٢٧٤٤
				٢٤٧,٢	٦١,٨٠		
	٣	١٩	٥٧,٦				—
	٤	٢٠	٤٨,٠٠				—

ويمكن تلخيص النتائج في الجدول التالي : -

الربع \ السنة	١٩٧٨	١٩٧٩	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢
الأول	—	,٩٩٤٤	,٩٤٦١	,١٠٠٤٢	,١,١٢٠٦
الثاني	—	,٢٩٢٥	,٢٣٧٨	,٣٢٤٥	,٢٧٤٤
الثالث	,٩٨٢٣	,٩٥١١	,١,٠٠٢٩	,٩٥٥٩	—
الرابع	,٧٤٩٦	,٨١٤٧	,٧٠٤٤	,٦٤٠٦	—

ولحساب الرقم القياسي الموسمي نحسب المتوسط في كل ربع ثم نحسب المتوسط العام للأرباع ومن ثم ننسب متوسط كل ربع إلى متوسط المتوسطات كما يلي :

	الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
المجموع	٤,٠٦٥٣	٥,١٢٩٢	٣,٨٩٢٢	٢,٩٠٩٣
المتوسط	١,٠١٦٣	١,٢٨٢٣	,٩٧٣١	,٧٢٧٣
الرقم القياسي الموسمي	١٠١,٦٥	١٢٨,٢٦	٩٧,٣٣	٧٢,٧٥

حيث :

$$\text{* متوسط متوسطات الأرباع} = \frac{٣,٩٩٩}{٤} = ٠,٩٩٩٨$$

$$\text{* الرقم القياسي الموسمي} = \frac{\text{متوسط الربع}}{\text{متوسط المتوسطات}} \times ١٠٠$$

## ملاحظة :

لمعرفة جدوى حساب الرقم القياسي الموسمي في المثال السابق نوجد معادلة خط انحدار (ص) على (س) باستخدام طريقة المربعات الصغرى .

حيث :

$$\begin{aligned} \text{مجدس} = 210, & \quad \text{مجدس}^2 = 2870, & \text{مجدس ص} = 11010,65 \\ \text{مجدس ص} = 1009,6, & \text{مجدس ص}^2 = 53426,665, & \text{ن} = 20 \end{aligned}$$

ويمكن للقارئ أن يحصل على معادلة خط انحدار (ص) على (س) في الصورة :

$$\hat{\text{ص}} = 6238 + 43,9297 \text{ س}$$

وللتنبؤ بقيمة المبيعات في الربع الثاني لسنة ١٩٨١ نجد أنه يقابلها  
س = ١٤ ومن ثم نجد أن :

$$\hat{\text{ص}} = 6238 + 43,9297 \times 14 = 52,6634$$

أما إذا أضفنا أثر الموسم فإن تقدير قيمة المبيعات في الربع الثاني لسنة ١٩٨١ يصبح :

$$\text{ص} = 1,2823 \times 52,6634 = 67,53$$

وهي أقرب إلى القيمة الحقيقية للمبيعات وهي ٦٧,٢ .

استبعاد أثر التغيرات الموسمية من السلسلة الزمنية :

لاستبعاد أثر التغيرات الموسمية في سلسلة زمنية تتبع نموذج الضرب نقوم بقسمة القيم الأصلية للسلسلة على الرقم القياسي الموسمي المناظر لكل فترة فنحصل على قيم جديدة تحتوي على اثر المتغيرات طويلة الأجل

( الاتجاه العام ) والتغيرات الدورية والتغيرات العرضية ، وباستبعاد أثر الاتجاه العام كما سبق يمكن الحصول على سلسلة زمنية تحتوي على أثر كل من التغيرات الدورية والتغيرات العشوائية . وهذه السلسلة تساعدنا في دراسة أثر التغيرات الدورية .

### ثالثاً : قياس التغيرات الدورية :

من الطرق التقليدية لقياس أثر التغيرات الدورية الطريقة التي يتم بموجبها استبعاد أثر كل من التغيرات الموسمية والتغيرات طويلة الأجل من السلسلة الزمنية ( كما سبق ذكره ) والحصول على سلسلة زمنية بأثر المتغيرات الدورية والعشوائية في صورة نسبة مئوية من الاتجاه العام ( نموذج الضرب ) ، ثم بعد ذلك نوجد متوسطاً متحركاً لهذه السلسلة من النسب اعتماداً على معرفة الظروف الاقتصادية السائدة وطول الدورة الاقتصادية للظاهرة المدروسة ، فنحصل بذلك على سلسلة زمنية خالية من التغيرات العرضية وهي عبارة عن سلسلة بالتغيرات الدورية في صورة نسبة مئوية من الاتجاه العام .

## تمارين الفصل التاسع

(١) - يعرض الجدول التالي مبيعات إحدى الشركات للملابس الجاهزة بآلاف الجنيهات خلال الفترة من ١٩٧٨ حتى ١٩٨٥.

السنوات	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥
المبيعات	٧٠	٧٤	٧٢	٧٧	٨٤	٨٢	٨٦	٩٥

والمطلوب :

- أ - رسم شكل انتشار البيانات واحسب معادلة الاتجاه العام الخطية بطريقة الرسم وبطريقة شبه المتوسطات .
- ب - معادلة الاتجاه العام علماً بأن المبيعات تأخذ شكلاً مستقيماً .
- ج - أوجد قيمة المبيعات الاتجاهية في عام ١٩٨٧ .
- د - أوجد معادلة الاتجاه العام الاسية والقيمة الاتجاهية لسنة ١٩٨٧ .
- هـ - حدد أياً من النماذج السابقة أفضل في تمثيل البيانات ( استخدم ر<sup>٢</sup> ) .
- (٢) - الجدول التالي يبين صادرات مصر من القطن بآلاف الجنيهات خلال الفترة من ١٩٧٥ - ١٩٨٣ .

السنوات	٧٥	٧٦	٧٧	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣
الصادرات	٤٢٦	٤٦٩	٣٨٣	٤٨٨	٥٤١	٥١٦	٥٢٨	٥٥٢	٤٦٠

## والمطلوب :

أ - عرض هذه البيانات بيانياً .

ب - وفق معادلة خط الاتجاه العام باستخدام طريقة المربعات الصغرى بفرض أن الصادرات تأخذ شكلاً مستقيماً ثم تنبأ بقيمة الصادرات سنة ١٩٨٧ .

جـ - وفق البيانات باستخدام معادلة من الدرجة الثانية وتنبأ بقيمة الصادرات في سنة ١٩٨٧ .

د - أي النموذجين أفضل في تمثيل البيانات .

(٣) - البيانات الآتية تمثل عدد شهادات الطلاق بالآلاف في مصر خلال الفترة ١٩٥٣ إلى ١٩٦٨ .

السنة	عدد شهادات الطلاق	السنة	عدد شهادات الطلاق
١٩٥٣	٦٢	١٩٦٢	٥٥
١٩٥٤	٦٠	١٩٦٣	٥٩
١٩٥٥	٦٠	١٩٦٤	٦٢
١٩٥٥	٦٠	١٩٦٥	٦٤
١٩٥٦	٥٧	١٩٦٦	٦٣
١٩٥٧	٦٠	١٩٦٧	٥٧
١٩٥٨	٦٠	١٩٦٨	٦٠
١٩٥٩	٦١		
١٩٦٠	٦٥		
١٩٦١	٦٢		

والمطلوب :

- أ - ارسم هذه البيانات وعلّق على الشكل الناتج .
- ب - وفق منحني الاتجاه العام في هذه البيانات بطريقة المتوسطات المتحركة وارسم منحني هذه المتوسطات على الشكل الناتج في (أ) .
- جـ - وفق منحني الاتجاه العام من هذه البيانات بطريقة المربعات الصغرى .
- د - استخدم البيانات المخلصة من أثر الموسمية والعرضية والدورية (بيانات ب) في حساب معادلة الاتجاه العام الخطية وقارنها مع المعادلة المحسوبة من البيانات الأصلية ثم حدد أيهما أفضل في تمثيل البيانات .

(٤) - يمثل الجدول التالي مبيعات شركة تامر الكبرى بآلاف الجنيهات في المدة من ١٩٨٠ حتى ١٩٨٦ .

السنوات	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦
المبيعات	١١٢	١٢٠	١٥٠	١٢٠	١٤٥	١٦٥	١٦٨

والمطلوب باستخدام طريقة المربعات الصغرى :

- أ - احسب معادلة الاتجاه العام للمبيعات بحيث تكون سنة الأساس مرة علم ١٩٨٠ ومرة عام ١٩٨٣ م .
  - ب - احسب القيمة المتوقعة للمبيعات في عام ١٩٩٠ م .
- (٥) - يوضح الجدول الآتي المبيعات الربع سنوية لشركة رحاب للصناعات الغذائية بآلاف الجنيهات في الفترة من ١٩٨٣ إلى ١٩٨٥ .

الربع \ السنوات	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥
الأول	٤٢	٤٦	٥٠
الثاني	٣٨	٤٦	٤٤
الثالث	٤٣	٤٧	٣٥
الرابع	٤٠	٤٧	٥٢

والمطلوب :

- أ - رسم السلسلة الزمنية .
- ب - قدر الدليل الموسمي باستخدام طريقة المتوسطات البسيطة ثم فسر معنى الأرقام التي تحصل عليها .
- ج - استخدم طريقة نسبة القيمة الأصلية إلى المتوسطات المتحركة في حساب الرقم القياسي الموسمي ( طول الدورة = ٤ ) . ثم ارسمها على نفس الرسم السابق وبيّن ملاحظاتك .
- د - حساب معادلة الاتجاه العام الخطية من البيانات الأصلية .
- هـ - احسب القيمة المتوقعة للربع الثاني من عام ١٩٨٧ وذلك باستخدام القيمة المتوقعة والدليل الموسمي ( نموذج الضرب ) .



## الفصل العاشر

### مبادئ نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية

#### Probability and Probability Distributions

تلعب الاحتمالات دوراً هاماً في حياتنا اليومية حيث إنها المقياس للحوادث غير المؤكدة . وتمثل الاحتمالات ركيزة أساسية لدراسة النظرية الاحصائية والتي تهتم أساساً بمحاولة تخصيص توزيع إحصائي معين للظاهرة موضع الدراسة مما يسهل من عملية التحليل الاحصائي لمجتمع الظاهرة عن طريق دراسة لعينة مسحوبة منه ومن ثم تعميم نتائج العينة على المجتمع ككل . وسوف نتعرف في هذا الفصل على أساسيات نظرية الاحتمالات ثم نقوم بدراسة المتغير العشوائي سواء كان منفصلاً أو مستمراً مع دراسة لبعض المؤشرات الهامة مثل القيمة المتوقعة والتباين . ويغطي بقيمة هذا الفصل بعض التوزيعات الاحتمالية الهامة والتي تستخدم كثيراً في مجال التحليل الاحصائي .

وللتعريف على أساسيات نظرية الاحتمالات فإننا سوف نبدأ بتعريف بعض المصطلحات الهامة والمستخدمه فيها .

#### The Random Experiment التجربة العشوائية

الاحتمالات كمصطلح مرتبط أساساً بنتائج تجارب نطلق عليها اسم التجارب العشوائية . والتجارب العشوائية هي كل العمليات Operations ذات النتائج غير المعروفة لنا سلفاً . ومثال ذلك النتيجة الممكن الحصول

عليها على الوجه العلوي لزهرة نرد سداسية الشكل فمع أننا نعرف جميع الأحداث الممكنة لهذه التجربة إلا أننا لا نستطيع التكهن بنتيجة التجربة قبل إجرائها .

مجموعة الأحداث الشاملة ( عالم العينة )  $Sample Space$  :

هي المجموعة التي تشتمل على جميع الحالات الممكنة لتجربة من التجارب العشوائية وتسمى عناصر هذه المجموعة بالأحداث البسيطة  $Elementary Events$  . وعادة ما يرمز لهذه المجموعة بالرمز (S) .  
مثال ( ١٠ - ١ ) :

في تجربة رمي زهرة النرد السابقة فإن عالم العينة (S) هي المجموعة التي عناصرها الأرقام الصحيحة من ١ إلى ٦ . بمعنى أن :

$$S = \{ ١ , ٢ , ٣ , ٤ , ٥ , ٦ \}$$

مثال ( ١٠ - ٢ ) :

في تجربة رمي زهرتي نرد سداسيتين فإن عالم العينة يتكون من ٣٦ حدثاً بسيطاً هي النتائج الناشئة من اقتران كل وجه على الزهرة الأولى بأي من الأوجه الستة على الزهرة الأخرى .  
حيث :

$$S = \{ (١,١) , (١,٢) , (١,٣) , (١,٤) , (١,٥) , (١,٦) ,$$

$$(٢,١) , (٢,٢) , (٢,٣) , (٢,٤) , (٢,٥) , (٢,٦) ,$$

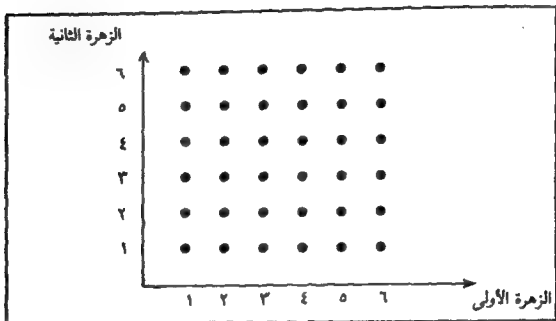
$$(٣,١) , (٣,٢) , (٣,٣) , (٣,٤) , (٣,٥) , (٣,٦) ,$$

$$(٤,١) , (٤,٢) , (٤,٣) , (٤,٤) , (٤,٥) , (٤,٦) ,$$

$$(٥,١) , (٥,٢) , (٥,٣) , (٥,٤) , (٥,٥) , (٥,٦) ,$$

$$(٦,١) , (٦,٢) , (٦,٣) , (٦,٤) , (٦,٥) , (٦,٦) \}$$

والشكل التالي يوضح جميع الأحداث التي يمكن الحصول عليها  
نتيجة لاجراء هذه التجربة



#### : The Event الحدث

أي مجموعة جزئية من عالم العينة (S) تسمى حدثاً احتمالياً . بمعنى  
أن الحدث هو عبارة عن تجمع أحداث بسيطة – تحت صفة معينة – في  
مجموعة واحدة وتكون عناصرها متممة لعالم العينة (S) .  
مثال ( ١٠ - ٣ ) :

في تجربة رمي زهرتي النرد في مثال ( ١٠ - ٢ ) فإن  
حدث الحصول على مجموعة الوجهين العلويين يساوي ٧ يتحقق إذا  
ظهرت إحدى النتائج الستة التالية :

$$\{ (٣, ٤) , (٤, ٣) , (٢, ٥) , (٥, ٢) , (١, ٦) , (٦, ١) \} .$$

وبلاحظ أن المجموعة أعلاه هي عبارة عن مجموعة جزئية من عالم  
العينة (S) تشترك في أن مجموع عناصرها يساوي ٧ .

وبلاحظ كذلك بأن الحدث يتحقق إذا وقعت أي من الحوادث البسيطة التي تحققه .

### الأحداث المتنافية **Mutually Exclusive Events** :

الأحداث المتنافية هي الحوادث التي يستحيل وقوعها معاً في آن واحد ومثال ذلك استحالة الحصول على شعار وكتابة في نفس الوقت عند رمي قطعة نقود واحدة ذات وجهين . وبصورة عامة عند اجراء أي تجربة عشوائية يمكن القول أن أي حدث من الأحداث البسيطة التي يتكون منها عالم العينة متناف مع بقية الأحداث الأخرى .

### الأحداث المستقلة **Independent Events** :

يقال عن حدثين بأنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر في وقوع الآخر . ومثال ذلك عند رمي قطعة نقود مرتين فإن الحصول على شعار من الرمية الأولى كحدث لا يؤثر على نتيجة الرمية الثانية لهذه القطعة كحدث آخر .

### التعريف الكلاسيكي للاحتمال :

في عام ١٨٢٠ عرف «لابلاس» احتمال أي حدث عشوائي وليكن (أ) بأنه عدد الأحداث البسيطة من عالم العينة (S) والتي تحقق هذا الحدث منسوبة إلى عدد الأحداث البسيطة الكلية للتجربة العشوائية . وهذا التعريف يشترط أمرين : -

١ - أن يكون العدد الكلي للأحداث البسيطة للتجربة العشوائية عدداً صحيحاً ومحدداً .

٢ - أن تكون لهذه الأحداث البسيطة نفس الفرصة في التحقق . وإذا تحقق هذا فإن :

$$ح(أ) = \frac{\text{عدد الحالات التي يتحقق فيها الحدث (أ)}}{\text{عدد الحالات الكلية للتجربة العشوائية}}$$

وهذا يعني أن احتمال تحقق (أ) [ والذي رمزنا له بالرمز ح (أ) ] هو النسبة بين عدد الحالات المواتية والعدد الكلي لجميع الحالات الممكنة .

مثال ( ١٠ - ٤ ) :

في تجربة رمي زهرتي النرد في مثال ( ١٠ - ٣ ) أوجد احتمال الحصول على مجموع يساوي ٧ .

الحل :

نفترض أن (أ) تشير إلى حدث الحصول على مجموع يساوي ٧ . وباستخدام التعريف الكلاسيكي للاحتمال فإن :

$$ح(أ) = \frac{\text{عدد الحالات التي تحقق أن يكون المجموع ٧}}{\text{عدد الحالات الكلية للتجربة العشوائية}}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{6}{36} =$$

التكرار النسبي والاحتمال :

احتمال أي حدث (أ) يعرف بأنه عبارة عن التكرار النسبي عندما تعاد التجربة الاحتمالية عدداً كبيراً من المرات . وبذلك فإن التكرار النسبي لحدث ما يمكن أن يستخدم في إيجاد قيمة احتمال وقوع هذا الحدث إن

لم نتمكن من حساب هذه القيمة قبل إجراء التجربة الاحتمالية . وبذلك يعرف احتمال الحدث (أ) بأنه :

$$ح(أ) = \frac{\text{عدد مرات تحقق الحدث (أ)}}{\text{عدد مرات إجراء التجربة الاحتمالية}}$$

بفرض أن عدد مرات إجراء التجربة الاحتمالية كان كبيراً وإلاً اعتبرت النسبة السابقة تقريباً لقيمة هذا الاحتمال . أي أن الاحتمال هو الرقم الثابت الذي يؤول إليه التكرار النسبي عندما يزداد عدد مرات إجراء التجربة .

### خصائص الاحتمال

مما سبق يمكن تلخيص مقياس الاحتمال فيما يلي : -

١ - احتمال وقوع الحدث (أ) هو عبارة عن مقياس رقمي غير سالب ينحصر بين الصفر والواحد الصحيح أي أن :

$$صفر \leq ح(أ) \leq ١$$

وبعكس هذا الرقم فرص هذا الحدث في الوقوع بالنسبة للفرص الكلية لجميع النتائج الممكنة لتجربة عشوائية .

٢ - احتمال وقوع حدث مؤكد عدم وقوعه (حدث مستحيل) = صفراً .  
مثال ذلك إذا كان المطلوب الحصول على احتمال سحب كرة حمراء من كيس يحتوي على كرات بيضاء فقط .

٣ - احتمال وقوع حدث مؤكد وقوعه  $1 =$

مثال ذلك إذا كان المطلوب الحصول على شعار أو كتابة عند رمي قطعة نقود متوازنة وكذلك عند إجراء تجربة معينة فإن :

$$1 = \text{احتمال النجاح} + \text{احتمال الفشل}$$

وبصورة عامة فإن :

$$1 = \text{احتمال وقوع الحدث (أ)} + \text{احتمال عدم وقوع الحدث (أ)}$$

$$1 = \text{ح (أ)} + \text{ح (أ')}^1$$

وتسمى  $أ'$  بالحدث المكمل للحدث  $أ$

٤ - إذا كان عالم العينة يشمل مجموعة الأحداث  $أ$  ،  $أ'$  ، ... ،  $أ_n$  فإن :

$$1 = \text{ح (أ)} + \text{ح (أ')} + \dots + \text{ح (أ}_n\text{)}$$

مثال (١٠ - ٥) :

في تجربة رمي زهرتي النرد في مثال (١٠ - ٢) أوجد :

١ - احتمال أن يكون مجموع الوجهين العلويين أقل من أو يساوي

٤ .

٢ - احتمال أن يكون مجموع الوجهين العلويين أكبر من أو يساوي

٥ .

الحل :

١ - حدث الحصول على مجموع الوجهين العلويين أقل من أو

يساوي ٤ وليكن ح (أ) يتحقق بظهور إحدى النتائج التالية :

(١،١) ، (٢،١) ، (١،٢) ، (٣،١) ، (١،٣) ، (٢،٢)

$$\therefore \text{ح (أ)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

٢ - ولإيجاد احتمال الحصول على مجموع الوجهين العلويين أكبر

من أو يساوي ٥ وليكن ح (ب) نلاحظ أن حدثي الحصول على

مجموع أقل من أو يساوي ٤ والحصول على مجموع أكبر من

أو يساوي ٥ هو أمر مؤكد الوقوع أي أن :

$$\text{ح (أ)} + \text{ح (ب)} = ١$$

$$\therefore \text{ح (ب)} = ١ - \text{ح (أ)}$$

$$= ١ - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$



مثال ( ١٠ - ٦ ) :

كيس به ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات بيضاء ، ٤ كرات سوداء  
وسحبت كرة واحدة منه أوجد :

- ١ - احتمال أن تكون الكرة حمراء .
- ٢ - احتمال أن تكون الكرة سوداء .
- ٣ - احتمال أن تكون الكرة خضراء .

الحل :

$$١ - \text{احتمال أن تكون الكرة حمراء} = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكرات الكلية}} = \frac{٥}{١٢}$$

$$٢ - \text{احتمال أن تكون الكرة سوداء} = \frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكرات الكلية}} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$$

٣ - احتمال أن تكون الكرة خضراء = صفر لأنه حدث مستحيل وقوعه .

مثال ( ١٠ - ٧ ) :

في تجربة رمي قطعتي عمله متوازنتين . أوجد احتمال الحصول  
على شعارين .

الحل :

إذا رمزنا للشعار بالرمز (ش) والكتابة بالرمز (ك) فإننا نحصل  
على إحدى النتائج التالية :

( ك ، ك ) ، ( ك ، ش ) ، ( ش ، ك ) ، ( ش ، ش ) .

$$\therefore \text{احتمال الحصول على شعارين} = \frac{١}{٤} .$$

مثال ( ١٠ - ٨ ) :

من مجموعة كاملة من أوراق اللعب ( عددها ٥٢ ورقة ) سحبت ورقة واحدة أوجد :

- ١ - احتمال أن تكون ٥ .
- ٢ - احتمال أن تكون أقل من ٣ .
- ٣ - احتمال أن تكون صورة ( بنت أو ولد أو شايب ) .

الحل :

$$١ - \text{احتمال أن تكون الورقة المسحوبة } ٥ = \frac{٤}{٥٢} = \frac{١}{١٣}$$

$$٢ - \text{احتمال أن تكون الورقة المسحوبة أقل من } ٣ \text{ ( ١ أو ٢ ) .}$$

$$= \text{احتمال أن تكون الورقة } ١ + \text{احتمال أن تكون الورقة } ٢$$

$$= \frac{٢}{١٣} = \frac{٤}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢} =$$

$$٣ - \text{احتمال الحصول على صورة} = \frac{\text{عدد الصور}}{\text{عدد الأوراق الكلية}} = \frac{١٢}{٥٢} = \frac{٣}{١٣}$$

ويمكن الوصول إلى نفس النتيجة باستخدام فكرة الأحداث المتنافية

حيث :

احتمال الحصول على صورة = احتمال الحصول على ولد + احتمال

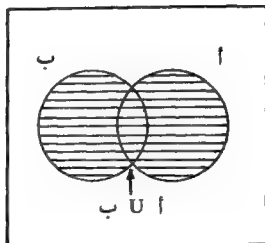
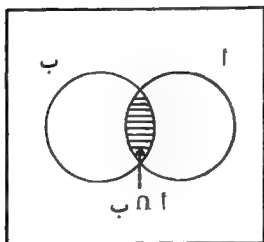
الحصول على بنت + احتمال الحصول

على شايب .

$$= \frac{٣}{١٣} = \frac{٤}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢}$$

## اتحاد مجموعة من الأحداث Union :

إذا كان لدينا حدث يتحقق يتحقق أي من الحدثين (أ) أو (ب) مثلاً فإننا نعبر عن ذلك الحدث بالرمز  $(A \cup B)$  أو اتحاد الحدثين (أ) مع (ب) . ويمكن التعبير عن ذلك هندسياً بالجزء المظل من الشكل الأيمن التالي :



حيث يمثل الرمز  $(A \cup B)$  المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر البسيطة التي تحقق الحدث (أ) مضافاً إليها جميع العناصر التي تحقق الحدث (ب) ويدون تكرار . وعليه فإن ظهور أي من الأحداث البسيطة للمجموعة  $(A \cup B)$  معناه أن هذا الحدث إما أن يكون عنصراً من (أ) فقط أو عنصراً من (ب) فقط أو منهما معاً . ويمكن تعميم ذلك لأكثر من مجموعتين .

## تقاطع مجموعة من الأحداث Intersection :

إذا كان لدينا حدث ما يتحقق يتحقق حدثين (أ) و (ب) معاً فإننا نعبر عن هذا الحدث بالرمز  $(A \cap B)$  أو الحدث الناشئ من العناصر

المشتركة أو الأحداث البسيطة المشتركة بين كل من الحدث (أ) والحدث (ب) . ويمكن التعبير عنها هندسياً بالجزء المظل كما في الشكل الأيسر السابق .

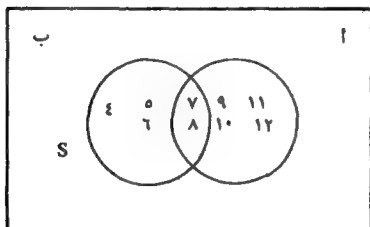
مثال (١٠ - ٩) :

في تجربة رمي زهرتي نرد في مثال (١٠ - ٢) إذا كان الحدث (أ) يرمز للحصول على مجموع أكبر من أو يساوي ٧ والحدث (ب) يرمز لحدث الحصول على مجموع من ٤ إلى ٨ .

١ - أوجد (أ ∩ ب)    ٢ - أوجد (أ ∪ ب)

الحل :

يمكن التعبير عن الأحداث (أ ، ب) هندسياً في الشكل التالي :



من الرسم يتضح أن :

١ -  $A \cap B$  = المجموعة التي تتكون من المجاميع ٧ أو ٨ .

٢ -  $A \cup B$  = المجموعة التي تتكون من المجاميع ٤ إلى ١٢ .

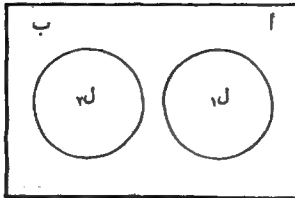
### قانون جمع الاحتمالات : The Addition Law of Probability

نفترض أننا أجرينا تجربة (ن) من المرات لمشاهدة وقوع كل من الحدثين (أ ، ب) وأن :

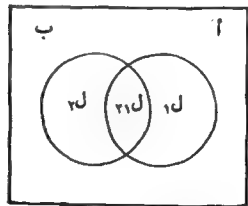
$$\begin{aligned} \text{ل} &= \text{عدد مرات وقوع الحدث أ} \\ \text{ل} &= \text{عدد مرات وقوع الحدث ب} \\ \text{ل} &= \text{عدد مرات وقوع الحدثين أ ، ب معاً.} \\ \text{ن} &= \text{عدد الاحداث الشاملة.} \end{aligned}$$

ويتضح من الشكل التالي أن :

$$\begin{aligned} \text{ل} + \text{ل} & \text{ هي عدد مرات وقوع الحدث أ} \\ \text{ل} + \text{ل} & \text{ هي عدد مرات وقوع الحدث ب} \end{aligned}$$



حدثان متافيتان



حدثان غير متافيتين

وباستخدام التعريف السابق للاحتمال نجد أن :

$$\begin{aligned} \text{ح (A} \cup \text{B)} &= \frac{n_1 + n_{11} + n_{12}}{n} \\ &= \frac{n_1 + n_{11} + n_{12} + n_{12} - n_{11} + n_{12}}{n} \\ &= \frac{n_1}{n} - \frac{n_{11} + n_{12}}{n} + \frac{n_{11} + n_{12}}{n} = \end{aligned}$$

$$\text{ح (A} \cup \text{B)} = \text{ح (A)} + \text{ح (B)} - \text{ح (A} \cap \text{B)} \quad (1-10)$$

ويمكن تعميم قانون جمع الاحتمالات في (1-10) لأكثر من حادثتين غير متنافيتين .

ملاحظة : إذا كان الحادثان (A ، B) متنافيين فإن :

$$\text{ح (A} \cap \text{B)} = \text{صفر}$$

ومن ثم يؤول قانون جمع الاحتمالات في (1-10) إلى :

$$\text{ح (A} \cup \text{B)} = \text{ح (A)} + \text{ح (B)} \quad (2-10)$$

وبصورة عامة يمكن القول أن احتمال وقوع حدث مركب من الأحداث المتنافية يساوي مجموع احتمالات الأحداث المتنافية التي تكونه .

مثال (10-10) :

إذا كان عدد الزبائن الداخلين على حلاق للشعر خلال النصف ساعة الأولى من افتتاح محله قيمة بين الصفر والخمسة بالاحتمالات الآتية :

عدد الأشخاص	0	1	2	3	4	5
الاحتمال	1ر	1ر	2ر	3ر	2ر	1ر

أوجد احتمال أن يكون عدد الزبائن الداخلين خلال النصف ساعة الأولى من افتتاح المحل ٣ على الأقل .  
الحل :

حيث إن عدد الزبائن الداخلين هو أحد القيم السابقة فلنأخذ نستطيع أن نطبق قانون الجمع هنا للأحداث المركبة المكونة من اتحاد مجموعتين أو أكثر من عدد الزبائن ( حيث إنها أحداث متنافية ) . ومن ثم فإن احتمال أن يكون عدد الزبائن ٣ على الأقل يمكن التعبير عنه كما يلي :

$$\begin{aligned} H(3 \text{ على الأقل}) &= H(3 \text{ أو } 4 \text{ أو } 5) \\ &= H(3 \cup 4 \cup 5) \\ &= H(3) + H(4) + H(5) \\ &= 3, 2, 1, 6 = 6, \end{aligned}$$

مثال ( ١٠ - ١١ ) :

ألقيت زهرة نرد . أوجد احتمال الحصول على رقم ٤ فأكثر .

الحل :

نفترض أن :

- أ ترمز لحدث الحصول على رقم ٤
- ب ترمز لحدث الحصول على رقم ٥
- ج ترمز لحدث الحصول على رقم ٦

وحيث إنها أحداث متنافية

$$\begin{aligned} H(4 \text{ فأكثر}) &= H(4 \text{ أو } 5 \text{ أو } 6) \\ &= H(4) + H(5) + H(6) \\ &= \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \end{aligned}$$

## قانون ضرب الاحتمالات The Multiplication Law of Probability

إذا كان الحدثان (أ ، ب) مستقلين فإن :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (10-3)$$

وبصورة عامة إذا كان الحدث المركب يتكون من مجموعة من الأحداث المستقلة فإن احتمال وقوع هذا الحدث المركب يساوي حاصل ضرب احتمالات هذه الأحداث المستقلة .

أما إذا كان الحدثان (أ ، ب) غير مستقلين فإن :

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) \quad (10-4)$$

حيث  $P(A|B)$  هو الاحتمال الشرطي لوقوع الحدث (أ) علماً بأن الحدث (ب) قد وقع . وبصورة بديلة فإن :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) \quad (10-5)$$

حيث  $P(B|A)$  هو الاحتمال الشرطي لوقوع الحدث (ب) علماً بأن الحدث (أ) قد وقع فعلاً .

ملاحظة :

يتضح من العلاقات (10-3) ، (10-4) ، (10-5) أنه يمكن وضع تعريف بديل للأحداث المستقلة على النحو التالي : -

الحدثان (أ ، ب) مستقلان إذا كان :

$$P(A) = P(A|B) \quad \text{أو} \quad P(B) = P(B|A)$$

بمعنى أن الاحتمال الشرطي لوقوع أي من الحدثين تحت شرط وقوع الحدث الآخر يساوي احتمال وقوع الحدث غير الشرطي ، وهو ما يتفق مع تعريف الأحداث المستقلة .



## الاحتمال الشرطي Conditional Probability :

باستخدام العلاقة (١٠ - ٤) يمكن حساب قيمة احتمال وقوع الحدث (أ) بشرط أن الحدث (ب) قد وقع فعلاً كما يلي : -

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{بشرط أن } P(B) > 0$$

وكذلك من العلاقة (١٠ - ٥) يمكن حساب قيمة الاحتمال الشرطي لوقوع الحدث (ب) علماً بأن الحدث (أ) قد وقع فعلاً بالعلاقة .

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{بشرط أن } P(A) > 0$$

مثال (١٠ - ١٢) :

إذا كان احتمال الحصول على طالب متزوج من جامعة الكويت هو ٢٥ر واحتمال الحصول على طالب من كلية التجارة هو ١٥ر . أوجد احتمال الحصول على طالب من كلية التجارة ومتزوج من بين جميع طلاب الجامعة .

**الحل :**

نفرض أن (أ) ترمز لحدث الحصول على طالب متزوج من الجامعة وأن (ب) ترمز لحدث الحصول على طالب من كلية التجارة .

$$\therefore P(A) = ٢٥ر , P(B) = ١٥ر$$

$$P(A \cap B) = \text{ح (متزوج ومن كلية التجارة)}$$

وحيث ان الحدثين مستقلان فإن :

$$ح(أ \cap ب) = ح(أ) \times ح(ب)$$

$$= ٢٥ \times ١٥ = ٣٧٥$$

مثال ( ١٠ - ١٣ ) :

في تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنتين في مثال ( ١٠ - ٧ ) أوجد احتمال الحصول على شعارين بشرط أن يكون احدهما من قطعة النقود الثانية .

الحل :

بافتراض أن ( أ ) ترمز لحدث الحصول على شعارين  $\equiv$  ( ش ، ش )  
وبافتراض أن ( ب ) ترمز لحدث الحصول على شعار من إلقاء القطعة الثانية  $\equiv$  ( ك ، ش ) ، ( ش ، ش )

$$\therefore ح(ب) = \frac{٢}{٤}$$

وباستخدام تعريف الاحتمال الشرطي :

$$ح(أ | ب) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)} = \frac{١}{٤} \div \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

مثال ( ١٠ - ١٤ ) :

كيس به ١٢ كرة منها ٥ حمراء ، ٣ بيضاء ، ٤ سوداء كما في مثال ( ١٠ - ٦ ) سحبت كرتان على التوالي أوجد احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى سوداء إذا كان :

١ - السحب يتم بإرجاع الكرة الأولى المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية .

٢ - السحب يتم بدون إرجاع .

الحل :

للحصول على كرتين إحداهما حمراء والأخرى سوداء يلزم أن تكون الكرة الأولى حمراء والأخرى سوداء أو العكس الأولى سوداء والثانية حمراء .

وبفرض أن : أ ترمز لحدث الحصول على كرة حمراء وأن

ب ترمز لحدث الحصول على كرة سوداء

وحيث ان الأحداث متافقة فإن :

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \text{ح (أ)} \times \text{ح (ب)} + \text{ح (ب)} \times \text{ح (أ)}$$

أولاً : إذا كان السحب بالارجاع :

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \frac{4}{12} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{40}{144} = \frac{5}{18}$$

ثانياً : إذا كان السحب بدون إرجاع :

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \frac{4}{12} \times \frac{5}{11} + \frac{5}{11} \times \frac{4}{12} = \frac{40}{132} = \frac{1}{33}$$

المتغير العشوائي Random Variable :

يصاحب كل تجربة من التجارب العشوائية مجموعة أحداث شاملة « عالم العينة » . وكذلك فإن ناتج التجربة العشوائية سوف نرسم له بالمتغير (س) حيث تختلف قيمتها من محاولة لأخرى ويسمى بالمتغير العشوائي حيث لا يمكن معرفة قيمته إلا بعد إجراء التجربة .

ووصف المتغير العشوائي بأنه متصل Continuous أو منفصل Discrete يتوقف على عالم العينة . فإذا كان عالم العينة لا نهائي ولا يمكن حصره فالمتغير العشوائي المناظر له يسمى بالمتغير المتصل ، أما إذا كان عالم العينة محدوداً ويمكن حصره فإن المتغير العشوائي المناظر له يسمى بالمتغير المنفصل .

مثال (١٠ - ١٥) :

أوجد المتغير العشوائي الذي يناظر تجربة رمي زهرة النرد في مثال (١٠ - ١) .

الحل :

نعلم مما سبق أن التجربة العشوائية الدالة على رمي زهرة نرد هي عدد صحيح يقع بين ١ ، ٦ .

∴ المتغير العشوائي (س) يأخذ أحد القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ .  
وواضح أنه متغير عشوائي منفصل .

مثال (١٠ - ١٦) :

بافتراض أن الباص يصل إلى محطة معينة دائماً بين الساعة ٨ ، ١٠ صباحاً . وإذا كان هناك شخص يركب هذا الباص يومياً ويذهب للمحطة دائماً الساعة ٨ صباحاً . أوجد المتغير العشوائي الذي يناظر الوقت الذي يجب أن ينتظره الشخص يومياً لكي يلحق بالباص .

الحل :

نفترض أن (س) ترمز للمتغير العشوائي الذي يناظر مقدار الوقت الذي يجب أن ينتظره الشخص يومياً من لحظة وصوله للمحطة في الساعة الثامنة إلى لحظة وصول الباص للمحطة .

يتضح أن (س) هي متغير عشوائي تنحصر قيمته بين الصفر، ١٠ دقائق أي أن :

$$صفر \leq س \leq ١٠$$

وهي قيم غير محدودة وتأخذ قيمة صحيحة أو كسرية .

وواضح أنه متغير عشوائي متصل يمكن توصيله بخط مستقيم ابتداءً من القيمة صفر وحتى القيمة ١٠ .

## التوزيعات الاحتمالية

تركزت دراستنا في الفصول السابقة لمراحل الاحصاء الوصفي على جمع البيانات عن الظاهرة ( المتغير ) موضع الدراسة ثم إعداد التوزيعات التكرارية وحساب مقاييس الموضع ومقاييس التشتت منها لوصف المتغيرات موضع الدراسة . وفي هذه المرحلة سوف نحاول الحصول على مثل هذه المقاييس بصورة أدق بعد تحديد شكل التوزيع الاحتمالي للمتغير موضع الدراسة وذلك بحساب احتمالات القيم التي يأخذها المتغير العشوائي باستخدام قواعد الاحتمالات .

وفي المثال التالي سوف نوضح بإسهاب كيفية الحصول على التوزيع الاحتمالي ثم نتقل إلى استخدام التوزيعات الاحتمالية في حساب الوسط الحسابي والتباين كمقياسين للترعة المركزية والتشتت على التوالي . وسوف نستعرض بعد ذلك بعض التوزيعات الاحتمالية الهامة والتي سوف نتعرض إليها في دراستنا لاختبار الفروض الاحصائية في الفصل التالي .

مثال ( ١٠ - ١٧ ) :

في تجربة رمي ثلاث قطع من النقود المتوازنة . أوجد التوزيع الاحتمالي الذي يمثل عدد مرات ظهور الشعار .

الحل :

عند رمي ثلاث قطع نقود فإننا نحصل على أحد الحالات التالية والتي يلخصها الجدول التالي بافتراض أن (س) تمثل المتغير العشوائي لعدد الشعارات في التجربة ، (ش) تمثل الشعار وأن (ك) تمثل الكتابة.

رقم القطعة	س = صفر	س = ١	س = ٢	س = ٣
١	ك	ش ك ك	ش ك ش	ش
٢	ك	ك ش ك	ش ش ك	ش
٣	ك	ك ك ش	ك ش ش	ش

يلاحظ من الجدول أن (س) هي متغير عشوائي منفصل تأخذ القيم صفر، ١، ٢، ٣ حيث :

- س = صفر يمثل عدم ظهور الشعار مطلقاً وهي حالة واحدة .  
س = ١ يمثل ظهور الشعار على قطعة واحدة وهي ٣ حالات .  
س = ٢ يمثل ظهور الشعار على قطعتين وهي ٣ حالات .  
س = ٣ يمثل ظهور الشعار على ثلاث قطع وهي حالة واحدة .

$$\text{ومن ثم فإن : } ح (س = \text{صفر}) = ف (\text{صفر}) = \frac{1}{8}$$

$$ح (س = ١) = ف (١) = \frac{3}{8}$$

$$ح (س = ٢) = ف (٢) = \frac{3}{8}$$

$$ح (س = ٣) = ف (٣) = \frac{1}{8}$$

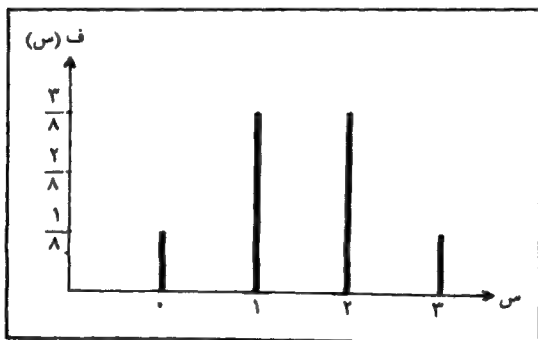
حيث ف (س) هي قيمة الاحتمال عند النقطة (س) أو دالة التوزيع الاحتمالي . ويمكن تلخيص النتائج السابقة في جدول التوزيع الاحتمالي التالي :

س	صفر	١	٢	٣
ف (س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

وكذلك يمكن وضع دالة التوزيع الاحتمالي في الصورة التالية :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{8} \text{ عندما } s = \text{صفر} \\ \frac{3}{8} \text{ عندما } s = 1 \\ \frac{3}{8} \text{ عندما } s = 2 \\ \frac{1}{8} \text{ عندما } s = 3 \\ \text{صفر} \text{ عند أي قيمة أخرى للمتغير (س)} \end{array} \right\} = f(s)$$

ويمكن تمثيل دالة الاحتمال والخاصة بعدد الشعارات عند إلقاء ثلاث قطع عملة متوازنة في الشكل التالي .



ويتضح مما سبق أنه في حالة التوزيعات الاحتمالية المنفصلة تكون :

١ - الاحتمالات المتاحة معرفة على مجموعة من النقاط ( القيم التي يأخذها المتغير العشوائي ) والاحتمال عند نقطة معينة يساوي الارتفاع لهذه النقطة .

٢ - دالة الاحتمال معرفة على مجموعة من النقاط التي يأخذها المتغير العشوائي وخلاف ذلك تكون الاحتمالات = صفر .

وهذا على عكس التوزيعات الاحتمالية المتصلة حيث الاحتمال عند نقطة معينة يساوي صفرأ حيث الاحتمال في هذه الحالة لا يعني مساحة بل يمثل تكتفاً للاحتمال ومن ثم تسمى دوال الاحتمال للمتغيرات المتصلة بدوال كثافة الاحتمال .

خصائص دالة الاحتمال :

١ - دالة غير سالبة دائماً أي أن :

$$f(s) \geq \text{صفر} .$$

٢ - مجموع الاحتمالات (أو المساحة تحت المنحنى) تساوي الواحد الصحيح أي أن :

مجد ف (س) = ١ في حالة التوزيعات المنفصلة

{ ف (س) و س = ١ في حالة التوزيعات المتصلة

حيث [ ترمز إلى تكامل الدالة-

مثال ( ١٠ - ١٨ ) :

أثبت أن التوزيع الاحتمالي في مثال ( ١٠ - ١٧ ) هو دالة احتمال .



الحل :

١ - يتضح أن ف (س) موجبة لجميع قيم المتغير العشوائي (س)

$$٢ - \text{مجدف (س)} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

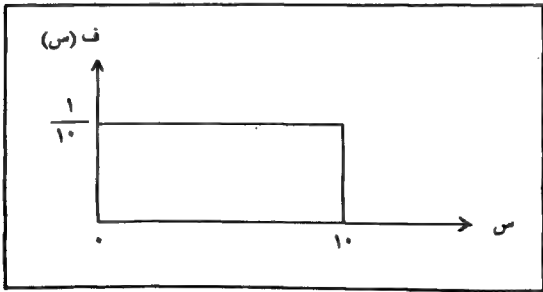
∴ ف (س) هي دالة احتمال .

مثال (١٠ - ١٩) :

أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل في مثال (١٠) -  
١٦) ثم برهن أنه دالة كثافة احتمال .

الحل :

يتضح أن الاحتمال يأخذ قيمة ثابتة على جميع مدى المتغير العشوائي (س) من صفر إلى ١٠ وهذه القيمة تساوي  $\frac{1}{10}$  . ويسمى مثل ذلك التوزيع بالتوزيع المنتظم Uniform Distribution . والشكل التالي يوضح دالة كثافة الاحتمال في هذه الحالة .



وتكتب دالة كثافة الاحتمال رياضياً في الصورة التالية :

$$f(s) = \frac{1}{10} \quad \text{حيث } 0 \leq s \leq 10$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

ونلاحظ أيضاً أنها تحقق الشروط كدالة للاحتمال حيث :

$$1 - f(s) \leq 0 \quad \text{لجميع قيم } (s)$$

$$2 - \int_0^{10} f(s) ds = 1$$

ومن الرسم أيضاً يتضح أن المساحة = مساحة المستطيل  
= القاعدة × الارتفاع

$$1 = \frac{1}{10} \times 10 =$$

**دالة الاحتمال التجميعية Cumulative Probability Function :**

يمكن بمعلومية دالة كثافة الاحتمال تقدير دالة الاحتمال التجميعية والتي تسمى أحياناً بدالة التوزيع Distribution Function والتي سوف نرمز لها بالرمز  $F(s)$  باستخدام العلاقة

$$F(s) = P(S \leq s)$$

$$= \int_{-\infty}^s f(s) ds \quad \text{في حالة التوزيعات المنفصلة}$$

$$= \int_{-\infty}^s f(s) ds \quad \text{في حالة التوزيعات المتصلة}$$

مثال ( ١٠ - ٢٠ ) :

أوجد دالة الاحتمال التجميعية لعدد مرات ظهور الشعار عند رمي ثلاث قطع نقود متوازنة في مثال ( ١٠ - ١٧ ) .

الحل :

الجدول التالي يلخص قيم المتغير العشوائي (س) الذي يمثل عدد الشعارات التي تظهر على القطع وكذلك دالة الاحتمال ودالة الاحتمال التجميعية لجميع قيم (س).

س	ف (س)	د (س)
صفر	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
١	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$
٢	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
٣	$\frac{1}{8}$	١

حيث :

$$د(صفر) = ح(س \geq صفر) = ف(صفر) = \frac{1}{8}$$

$$د(١) = ح(س \geq ١) = ف(صفر) + ف(١)$$

$$\frac{4}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} =$$

وهي تعطي احتمال الحصول على شعار واحد على الأكثر

$$د(2) = ح(س \geq 2) = ف(صفر) + ف(1) + ف(2)$$

$$\frac{7}{8} = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} =$$

وهي تعطي احتمال الحصول على شعارين على الأكثر

وبالمثل :

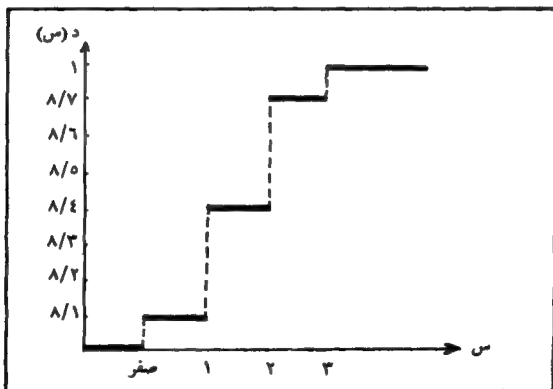
$$د(3) = ح(س \geq 3) = ف(صفر) + ف(1) + ف(2) + ف(3)$$

$$1 = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} =$$

وهي تعطي احتمال الحصول على ثلاثة شعارات على الأكثر

ويلاحظ أن هذا أمر مؤكد الحدوث.

والشكل التالي يمثل دالة الاحتمال التجميعية في هذه الحالة :



وبلاحظ من الرسم أن دالة التوزيع في حالة التوزيعات الاحتمالية المنفصلة لها الخصائص التالية :

- ١ - دالة غير متصلة تنحصر قيمتها بين الصفر والواحد الصحيح .
- ٢ - دالة قفزات Step Function أي يوجد بها قفزات وكل قفزة تساوي قيمة الاحتمال عند النقطة .

$$\begin{aligned} ٣ - د( \infty ) &= ح( س \geq \infty ) = ١ \\ د( -\infty ) &= ح( س \geq -\infty ) = \text{صفر} . \\ \text{حيث } \infty &\text{ هي الحد الأعلى في عالم العينة .} \end{aligned}$$

$$٤ - \text{إذا كانت } س_١ < س_٢ \text{ فإن :}$$

$$د( س_١ ) \leq د( س_٢ ) .$$

مثال ( ١٠ - ٢١ ) :

أوجد دالة الاحتمال التجميعية بمعلومية دالة كثافة الاحتمال التي حصلنا عليها في مثل ( ١٠ - ١٩ ) .

الحل :

$$\text{حيث أن} \quad \text{ف } د(س) = \frac{1}{10} \quad \text{صفر} \leq س \leq ١٠$$

$$\therefore د(س) = \int_{\text{صفر}}^س \frac{1}{10} ds$$

$$\text{صفر} \leq س < ١٠ \quad = \frac{س}{10}$$

كما نلاحظ أن  $d(s) = 1$  لجميع قيم  $s \leq 10$  .  
ويمكن تلخيص دالة التوزيع في الصورة التالية :

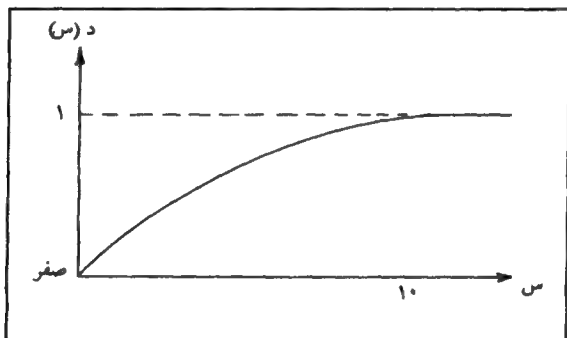
$$0 < s < 10$$

$$d(s) = \frac{s}{10}$$

$$s \geq 10$$

$$d(s) = 1$$

والشكل التالي يمثل هذه الدالة بيانياً .



ويتضح من الرسم انها دالة متصلة لها نفس خصائص دالة التوزيع التي سبق ذكرها،  
هذا بالاضافة الى انه اذا كان  $a > b$  فإن

$$d(a) - d(b) = d(a - b) \quad (a \geq b)$$

## التوقع The Expectation

التوقع هو متوسط التوزيع الاحتمالي وإذا فرضنا أن  $T$  (س) ترمز إلى توقع المتغير (س) والذي له دالة الاحتمال  $F$  (س) ، يمكن حساب التوقع باستخدام التعريف التالي :

$T$  (س) = مجـ س ف (س) في حالة التوزيعات المنفصلة  
 $= \int S F (س) dS$  في حالة التوزيعات المتصلة

وبصورة عامة يمكن إيجاد توقع أي دالة في (س) ولتكن  $H$  (س) على النحو التالي :

$T [H (س)] =$  مجـ  $H (س) F (س)$  للتوزيعات المنفصلة  
 $= \int H (س) F (س) dS$  للتوزيعات المتصلة

وسوف نهتم فقط بحساب توقع الدالة  $H (س) = S^2$  وذلك لاستخدامها في حساب التباين حيث :

$T (س^2) =$  مجـ  $S^2 F (س)$  للتوزيعات المنفصلة  
 $= \int S^2 F (س) dS$  للتوزيعات المتصلة

وبعد حساب توقع (س) وتوقع (س<sup>2</sup>) يمكن تقدير قيمة التباين والذي سوف نرمز له بالرمز ( $\sigma^2$ ) باستخدام العلاقة .

$$\text{التباين} = \sigma^2 = T (س^2) - [T (س)]^2$$

وكذلك نعلم من دراستنا لمقاييس التشتت في الفصل الخامس أنه يمكن حساب الانحراف المعياري للمتغير (س) . بإيجاد الجذر التربيعي للتباين .

## خصائص التوقع :

١ - توقع (مقدار ثابت) = المقدار الثابت أي أن :

$$ت (أ) = أ \quad \text{حيث } أ \text{ مقدار ثابت}$$

٢ - توقع (مقدار ثابت  $\times$  متغير) = المقدار الثابت  $\times$  توقع (المتغير)

أي أن :

$$ت (أ س) = أ \times ت (س)$$

٣ - توقع (مقدار ثابت + متغير) = المقدار الثابت + توقع (المتغير) أي

أن :

$$ت (أ + س) = أ + ت (س)$$

مثال (١٠ - ٢٢) :

أوجد الوسط الحسابي والتباين للمتغير المنفصل (س) في مثال

(١٠ - ١٧) .

الحل : يمكن الوصول إلى الحل بسهولة بتكوين الجدول التالي :

س	ف (س)	س ف (س)	س <sup>٢</sup> ف (س)
صفر	٨/١	صفر	صفر
١	٨/٣	٨/٣	٨/٣
٢	٨/٣	٨/٦	٨/١٢
٣	٨/١	٨/٣	٨/٩
	١	١,٥٠	٣

الوسط الحسابي = ت (س) = مجـ س ف (س)

$$= ١,٥٠$$

ت (س<sup>٢</sup>) = مجـ س<sup>٢</sup> ف (س) = ٣



∴ تبين (س) = ت (س) - [ت (س)]<sup>٢</sup>

$${}^٢(١, ٥) - ٣ =$$

$$,٧٥ = ٢, ٢٥ - ٣ =$$

ملاحظة :

$$,٨٦٦ = \sqrt{,٧٥} = \sqrt{\text{التباين}} = \text{الانحراف المعياري}$$

مثال ( ١٠ - ٢٣ ) :

أوجد الوسط الحسابي والتباين للمتغير المتصل (س) في مثال

( ١٠ - ١٩ ) .

الحل :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{10} \\ \text{صفر} \end{array} \right\} \text{الوسط الحسابي} = \text{ت (س)}$$

$$٥ = \left( \frac{100}{2} \right) \frac{1}{10} = \left[ \frac{{}^٢\text{س}}{2} \right] \frac{1}{10} =$$

وبالمثل :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{10} \\ \text{صفر} \end{array} \right\} \text{ت (س)} =$$

$$٣٣, ٣٣ = \left( \frac{1000}{3} \right) \frac{1}{10} = \left[ \frac{{}^٢\text{س}}{3} \right] \frac{1}{10} =$$

تبين (س) = ت (س) - [ت (س)]<sup>٢</sup>

$${}^٢(٥) - ٣٣, ٣٣ =$$

$$٨, ٣٣ = ٢٥ - ٣٣, ٣٣ =$$

## أولاً : التوزيع الطبيعي (الممتد) Normal Distribution

التوزيع الطبيعي هو أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداماً في التطبيقات الاحصائية المختلفة ، وكثير من الظواهر الاقتصادية والتجارية لها توزيع احتمالي يمكن تقريبه بصورة جيدة بالتوزيع الطبيعي . فمثلاً نسبة الربح ( أو الخسارة ) في أسعار السندات يقترب توزيعها من التوزيع الطبيعي والتوزيع الاحتمالي للمبيعات السنوية للمؤسسات التجارية يمكن تقريبه بتوزيع طبيعي . أيضاً مجموع الدرجات في امتحان عام مثل الثانوية العامة يخضع كغيره من الظواهر للتوزيع الطبيعي . ويمكن معرفة دقة تقريب التوزيع الاحتمالي للظاهرة موضع الدراسة بالتوزيع الطبيعي بمقارنة التوزيع التكراري النسبي لعينة كبيرة مع التوزيع الاحتمالي الطبيعي .

وقد وجد قديماً أن توزيعات أخطاء المشاهدة ( وهي الفروق بين القيم الفعلية والقيم المتوقعة ) يقترب كثيراً من شكل المنحنى الطبيعي كما أن أهمية هذا التوزيع تظهر في نظرية النهاية المركزية والتي تنص على أن مجموع ومتوسط عينات من بيانات عشوائية ( أيا كان توزيعها الاحتمالي ) مأخوذة من مجتمع من البيانات يقترب توزيعها من التوزيع الطبيعي وتعتمد اختبارات الفروض الاحصائية وفترات الثقة التي يحتمل أن تتضمن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي أو الظاهرة محل الدراسة في تحديدها على التوزيع الطبيعي أو افترض أن المتغير العشوائي الذي يصف الظاهرة التي يراد قياسها تتبع التوزيع الطبيعي .

وبصورة عامة أثبت جاوس Gauss أنه لو تأثر أحد المقاييس لإحدى الظواهر المختلفة بعدد كبير من العوامل العشوائية التي تحدث آثاراً ضئيلة في الحجم غير متوقعة في الاتجاه بالزيادة أو بالنقص فإن مقياس هذه الظاهرة يخضع في نهاية الأمر للتوزيع الطبيعي ، ويمثل التوزيع الطبيعي أهم التوزيعات الاحصائية على الإطلاق حيث إنه اعتبر أساساً لكثير من نظريات الاحصاء الرياضي بل إن كثيراً من التوزيعات الاحصائية الأخرى ( مثل توزيع ذات الحدين وتوزيع بواسون ) تقترب صورتها من التوزيع الطبيعي تحت شروط معينة .

دالة كثافة الاحتمال Probability Density Function :

إذا كان لدينا متغير عشوائي متصل (س) يتبع التوزيع الطبيعي الذي مركزه (  $\mu$  ) وانحرافه المعياري (  $\sigma$  ) فإن الصورة الرياضية لدالة كثافة الاحتمال تأخذ الشكل :

$$f(s) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

حيث :

$$\mu = 3,14 , \sigma = 2,718 , -\infty < s < \infty$$

وهذه الدالة تأخذ شكل منحنى متمائل ذي قمة واحدة ويمتد طرفاه إلى ما لا نهاية ، ويشبه في شكله العام شكل جرس مقلوب ولهذا يعرف أحياناً بالمنحنى الناقوسي (الجرسي) ، كما يطلق عليه البعض اسم منحنى جاوس نسبة إلى مكتشفه . ويعتمد شكل المنحنى على قيمة المعلمتين

(  $\sigma$  ,  $\mu$  ) حيث يؤدي تغير مقياس الموضع  $\mu$  إلى انتقال المنحنى يميناً أو يساراً بينما يؤدي تغير مقياس التشتت  $\sigma$  إلى اتساع أو ضيق المنحنى .

### خواص التوزيع الطبيعي Properties of Normal Distribution :

(١) التوزيع الطبيعي توزيع احتمالي متماثل حول متوسطة ( قيمته المتوقعة  $\mu$  ) ، بمعنى أن المتوسط الحسابي يقسم المنحنى الطبيعي إلى جزئين متماثلين تماماً .

(٢) يصل المنحنى إلى قيمته العظمى عند  $\mu$  =  $\sigma$  وعند  $\mu$  يتساوى كل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

(٣) المساحة تحت المنحنى تمثل الاحتمال الكلي للمتغير العشوائي ( احتمال أن يأخذ (س) قيمة بين  $-\infty$  و  $\infty$  ) لذلك فإن المساحة تساوي واحداً صحيحاً . كما أن مساحة أي جزء من المنحنى تمثل احتمال وقوع حدث معين ( أي احتمال أن تأخذ (س) قيمة بين عدة قيم داخل هذا الجزء) وهي قيمة محصورة بين الصفر والواحد .

(٤) من الشكل التالي يتضح الآتي :-

أ - مساحة الجزء من المنحنى المحصورة بين  $\mu - \sigma$  و  $\mu + \sigma$  تساوي ٦٨, ٢٧٪ من المساحة الكلية ، أي أن :

$$ح ( \mu - \sigma < س < \mu + \sigma ) = ٦٨, ٢٧ \%$$

ب - مساحة الجزء من المنحنى المحصورة بين  $\mu - ٢\sigma$  و  $\mu + ٢\sigma$  تساوي ٩٥, ٤٥٪ من المساحة الكلية ، أي أن :

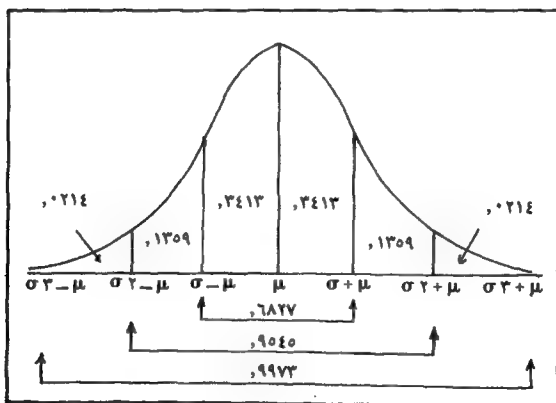
$$ح (\sigma^2 - \mu > س > \sigma^2 + \mu) = 0,9040$$

ج - مساحة الجزء من المنحنى المحصورة بين  $\sigma^3 - \mu = س$   
 $\sigma^3 + \mu = س$  تساوي ٩٩,٧٣٪ من المساحة الكلية ،  
 أي أن :

$$ح (\sigma^3 - \mu > س > \sigma^3 + \mu) = 0,9973$$

ويعني هذا أن احتمال أن تأخذ (س) قيمة أكبر من  $(\sigma^3 + \mu)$   
 أو قيمة أقل من  $(\sigma^3 - \mu)$  هو حدث نادر جداً  
 احتمالاً =  $1 - 0,9973 = 0,0027$  ، (أي ٢٧ من كل  
 ١٠٠٠٠).

المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي



د - كما أن مساحة الجزء من المنحنى المحصورة س =  $\mu$  -

$651,96$  س =  $\mu + 1,96\sigma$  تساوي ٩٥٪ من المساحة

الكلية أي أن :

$$\text{ح } (\mu - 1,96\sigma < \text{س} < \mu + 1,96\sigma) = 0,95$$

هـ - المساحة تحت المنحنى بين س =  $\mu - 2,58\sigma$  س =

$\mu + 2,58\sigma$  تساوي ٩٩٪ من المساحة الكلية أي أن

احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة بين

$(\mu - 2,58\sigma)$  والقيمة  $(\mu + 2,58\sigma)$  هو حدث

شبه مؤكد احتماله ٩٩٪ أي أن :

$$\text{ح } (\mu - 2,58\sigma < \text{س} < \mu + 2,58\sigma) = 0,99$$

• ملاحظة : لتحديد هذه المساحات يلزم معرفة معالم التوزيع  $(\sigma, \mu)$

### التوزيع الطبيعي المعياري (أو القياسي) Standard Normal Distribution

علمنا من معادلة التوزيع الطبيعي وشكل المنحنى سابقاً أنه يعتمد

على معلمتين (الوسط الحسابي للتوزيع  $\mu$  ، والانحراف المعياري  $\sigma$ )

لذلك فإن اختلاف هاتين المعلمتين يؤدي إلى اختلاف شكل التوزيع

الطبيعي ولإيجاد المساحة تحت كل منحنى طبيعي لحدث معين نحتاج إلى

جدول بالمساحات لكل منحنى ، وهذا أمر غير ممكن عملياً ، لذلك فإننا

نحتاج إلى جدول واحد لمساحة الأجزاء من هذا المنحنى مهما كانت قيمة

المعلمتين . ومن هنا نشأت الأهمية إلى إيجاد مثل هذا الجدول بأجزاء من

المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري . والتوزيع الطبيعي المعياري هو

توزيع طبيعي متوسطه صفر وانحرافه المعياري واحد صحيح ( $\mu = \text{صفر}$  ،

$(\sigma = 1)$  . فإذا كان لدينا متغير عشوائي (س) يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط  $\mu$  وانحراف معياري  $\sigma$  ، فيمكن الحصول على متغير آخر (ي) يتبع التوزيع الطبيعي المعياري وذلك باستخدام التعويض .

$$\frac{\mu - س}{\sigma} = ي$$

والمتغير العشوائي الجديد (ي) لا يخضع لوحدة القياس الأصلية للبيانات ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$ف (ي) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{ي^2}{2}} \quad -\infty < ي < \infty$$

من خواص التوزيعات الطبيعية أن المساحة تحت المنحنى الطبيعي لمتغير عشوائي طبيعي (س) متوسطة ( $\mu$ ) وانحرافه المعياري ( $\sigma$ ) بين س = أ ، س = ب ، والتي تعكس احتمال أن تأخذ (س) قيمة بين

(أ ، ب) تساوي المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري بين

$$\frac{\mu - ب}{\sigma} = ي \quad ، \quad \frac{\mu - أ}{\sigma} = ي$$

مهما كانت قيمة  $\mu$  و  $\sigma$  .

وبصورة أخرى فإن :

$$ح (أ \geq س \geq ب) = ح \left( \frac{\mu - أ}{\sigma} \leq ي \leq \frac{\mu - ب}{\sigma} \right)$$

لذى فلابجاء احتمال أى. حدث طبيعى ( يتبع التوزيع الطبيعى ) فإننا نحوله إلى حدث طبيعى معيارى باستخدام العلاقة :

$$Y = \frac{\text{قيمة المتغير الطبيعى} - \text{متوسطة الحسابى}}{\text{الانحراف المعيارى}}$$

ومن ثم نستخدم جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعى المعيارى لإيجاد مساحة ذلك الحدث . وجدول رقم (١) فى آخر الكتاب يعطى المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى بين الحد الأدنى ( - ∞ ) وقيمة معينة ص ( حيث ص ≤ صفر ) . وهذه المساحات يمكن إيجادها باستخدام العلاقة :

$$P(Y < \infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Y e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

حيث م (ص) هي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائى (ى) قيمة بين ( - ∞ ، ص ) .

ونظراً لأن التوزيع الطبيعى متماثل فإن المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى بين (ى) تساوى ( صفر ، ص ) هي نفس المساحة بين (ى) تساوى ( صفر ، - ص ) . أى أن :

$$P(0 \leq Y \leq \infty) = P(-\infty \leq Y \leq 0)$$

ومن خصائص التوزيع الطبيعى المعيارى أن :

$$P(-\infty \leq Y \leq \infty) = P(\sigma - \mu \leq Y \leq \sigma + \mu) = 0.6827$$



$$\text{ب - ح } (\mu - \sigma \geq \text{س} \geq \mu + \sigma) \text{ ح } = (\mu - \sigma \geq \text{س} \geq \mu + \sigma) \text{ ح } = 0,9545 =$$

$$\text{ج - ح } (\mu - \sigma \geq \text{س} \geq \mu + \sigma) \text{ ح } = (\mu - \sigma \geq \text{س} \geq \mu + \sigma) \text{ ح } = 0,9973 =$$

$$\text{د - ح } (\mu - \sigma \geq \text{س} \geq \mu + \sigma) \text{ ح } = (\mu - \sigma \geq \text{س} \geq \mu + \sigma) \text{ ح } = 0,95 =$$

$$\text{هـ - ح } (\mu - \sigma \geq \text{س} \geq \mu + \sigma) \text{ ح } = (\mu - \sigma \geq \text{س} \geq \mu + \sigma) \text{ ح } = 0,99 =$$

وسوف نستعرض فيما يلي بعض الأمثلة والتي نوضح كيفية استخدام جدول (١) .

مثال (١٠ - ٢٤) :

أوجد القيمة المعيارية المقابلة للقيم التالية من متغير (س) يتبع التوزيع الطبيعي .

$$\text{أ - س } = 110 \text{ عندما تكون } \mu = 90, \sigma = 7,5$$

$$\text{ب - س } = 45 \text{ عندما تكون } \mu = 52, \sigma = 4$$

الحل :

$$\text{أ - س } = 110 \text{ عندما تكون } \mu = 90, \sigma = 7,5 \text{ ح } = \frac{\mu - \text{س}}{\sigma} = \frac{90 - 110}{7,5} = \frac{10}{7,5} = \text{ح}$$

$$\text{ب - س } = 45 \text{ عندما تكون } \mu = 52, \sigma = 4 \text{ ح } = \frac{\mu - \text{س}}{\sigma} = \frac{52 - 45}{4} = \frac{7}{4} = \text{ح}$$

مثال ( ١٠ - ٢٥ ) :

س متغير عشوائي متصل يخضع للتوزيع الطبيعي توقعه الرياضي ٨٠ وتباينه ٩ ، ادرس الاحتمالات الآتية :

$$أ - ح (س < ٨٤,٥)$$

$$ب - ح (س > ٧٨,٢)$$

$$ج - ح (٨١,٥ > س > ٨٤)$$

الحل :

نوجد أولاً المتغيرات الطبيعية المعيارية المناظرة لحدود الفترات محل الدراسة حتى يمكن استخدام الجدول على النحو التالي :

$$أ - حيث أن س = ٨٤,٥ ، μ = ٨٠ ، σ = ٣$$

$$ي = \frac{س - μ}{σ} = \frac{٨٤,٥ - ٨٠}{٣} = ١,٥$$

$$\therefore ح (س < ٨٤,٥) = ح (ي < ١,٥)$$

$$= ١ - ح (ي > ١,٥)$$

$$= ١ - م (١,٥)$$

$$= ٩٣٣٢ - ١ = ٠,٦٦٨$$

ومعنى هذا أننا ننظر في المدى الطويل أن لا تزيد (س) عن ٨٤,٥ إلا في حوالي ٦٧ حالة من كل ألف مشاهدة.

$$ب - ي = \frac{س - μ}{σ} = \frac{٧٨,٢ - ٨٠}{٣} = -٠,٦$$

$$\therefore ح (س > ٧٨,٢) = ح (ي > -٠,٦)$$

$$= م (-٠,٦) = ٢٧٤٢$$

$$ج-١ = \frac{٨٠ - ٨١,٥}{٣} = ٠,٥$$

$$ج-٢ = \frac{٨٠ - ٨٤}{٣} = ١,٣$$

$$\therefore ج (٨١,٥ > س > ٨٤) = ج (٠,٥ > ي > ١,٣)$$

$$م - (١,٣) - (٠,٥) =$$

$$= ٩٠٣٢ - ٦٩١٥$$

$$= ٢١١٧$$

ثانياً : توزيع كاي<sup>٢</sup> : ( مربع كاي ) Chi - Square Distribution

توزيع كاي<sup>٢</sup> من التوزيعات الهامة المستخدمة بكثرة في كثير من التطبيقات . وهذا التوزيع عبارة عن التوزيع الاحتمالي لمجموع مربعات متغيرات مستقلة موزعة توزيعاً طبيعياً معيارياً ( بمعنى أن لها متوسطات تساوي صفر وتباين كل منها يساوي الواحد الصحيح ) .

فإذا فرضنا أن لدينا المتغيرات الطبيعية :

$$س١ ، س٢ ، ... ، س٧$$

بحيث أن لكل منها متوسطاً حسابياً ( $\mu$ ) وانحرافاً معيارياً ( $\sigma$ ) فإنه - كما سبق دراستنا في التوزيع الطبيعي - يمكن تحويل هذه المتغيرات إلى متغيرات طبيعية معيارية كما يلي :

$$ص١ = \frac{\mu - س١}{\sigma} ، ص٢ = \frac{\mu - س٢}{\sigma} ، ... ، ص٧ = \frac{\mu - س٧}{\sigma}$$

ويفرض أن هذه المتغيرات مستقلة فإن  $\sum_{j=1}^n$  ص<sup>٢</sup> متغير يتبع توزيع

كاي<sup>٢</sup> بدرجات حرية (ن) . بمعنى أن مجموع مربعات (ن) من المتغيرات

المستقلة الموزعة توزيعاً طبيعياً معيارياً يتبع توزيع كا<sup>٢</sup> بدرجات حرية (ن)  
وله دالة كثافة احتمال تأخذ الشكل التالي :

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} \quad \text{صفر} \leq v \leq 1$$

حيث  $k$  ،  $h$  مقادير ثابتة

ن تمثل درجات الحرية والتي يتوقف عليها شكل التوزيع .

خصائص التوزيع :

١ - الوسط الحسابي = ن

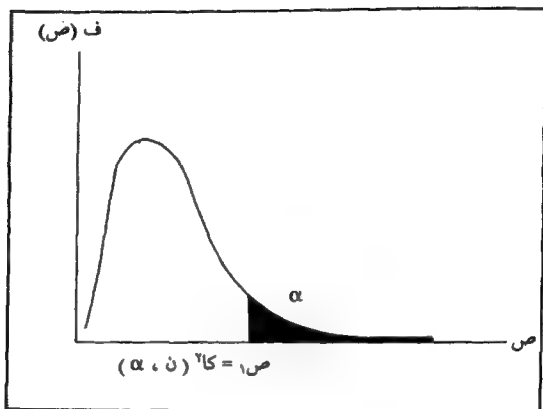
٢ - التباين = ٢ ن

∴ الانحراف المعياري =  $\sqrt{2 \text{ ن}}$

٣ - القيمة الشائعة ( المنوال ) = ن - ٢

٤ - هذا التوزيع ملئو ناحية اليمين ( التواء موجب ) ويقترب من التماثل كلما كبرت قيمة (ن) .

وهناك جداول معدة لتوزيع كا<sup>٢</sup> بحيث تعطي القيمة الموجودة للمتغير على المحور الأفقي التي يكون الاحتمال بعدها مساوياً مقداراً معيناً ( أي يعطي الاحتمال في ذيل التوزيع ) ويديهي أن يعتمد الجدول على درجات الحرية حيث يوجد منحني لكل درجة من درجات الحرية . ويوضح الشكل التالي توزيع كا<sup>٢</sup> .



ونستخدم جدول  $\chi^2$  طالما كان عدد درجات الحرية  $n > 30$  أما إذا كانت  $n < 30$  فنستخدم جدول التوزيع الطبيعي كتقريب لـ  $\chi^2$  .  
 وجدول  $\chi^2$  محسوب على أساس إيجاد احتمال أن  $(v \leq v_1)$  وهي التي نعبّر عنها رياضياً كما يلي :

$$H(v \leq v_1) = \int_{v_1}^{\infty} f(v) dv$$

وهي تعطي المساحة في ذيل المنحنى كما يتضح من الشكل السابق .

فإذا افترضنا أن المساحة المظللة هي  $(\alpha)$  فإن  $(v_1)$  هي عبارة عن قيمة المتغير على المحور الأفقي والتي تكون مساحة المنحنى عندها

وحتى نهاية المنحنى والتي تمثلها المنطقة المظللة تساوي  $(\alpha)$  عند درجات الحرية  $(n)$  وهي التي نختصرها في الصورة :

$$ص_1 = كا^2 (n, \alpha)$$

وجداول (٢) في آخر الكتاب يعطي قيماً لتوزيع  $كا^2$  حيث يمثل العمود الأول فيه درجات الحرية من الرقم (١) حتى الرقم (٣٠) وبقية الأعمدة تعطي القيمة على المحور الأفقي (ص<sub>١</sub>) التي تكون المساحة بعدها مساوية للاحتمال الموجود في قمة الأعمدة (وهي قيم مختارة) .

مثال (١٠ - ٢٦) :

باستخدام جدول  $كا^2$  (جدول ٢) أوجد

$$كا^2 (١٠, ٢٥), كا^2 (٨, ٠١)$$

الحل :

من الجدول نجد أن :

$$كا^2 (١٠, ٢٥) = ١٢,٥٠$$

$$كا^2 (٨, ٠١) = ٢٠,١٠$$

مثال (١٠ - ٢٧) :

أوجد قيمة المتغير (ص) الذي يتبع  $كا^2$  بـدرجات حرية (١٥) والتي يكون الاحتمال أكبر منها هو ٠,٠١

الحل :

من جدول (٢) نجد أن :

$$كا^2 (١٥, ٠١) = ٣٠,٦$$

مثال ( ١٠ - ٢٨ ) :

أوجد قيمة المتغير (ص) الذي يتبع توزيع كا<sup>٢</sup> بدرجات حرية (١٢) والتي يكون الاحتمال أصغر منها هو ٠,٩٥

الحل :

الاحتمال أكبر منها = ١ - ٠,٩٥ = ٠,٠٥

ومن جدول (٢) نجد أن :

كا<sup>٢</sup> ( ١٢ ، ٠,٠٥ ) = ٢١

ثالثاً: توزيع (ت) T - Distribution :

يستخدم توزيع (ت) في كثير من التطبيقات وخاصة في اختبارات الفروض الاحصائية بدلاً من التوزيع الطبيعي إذا كان حجم العينة صغيراً ( أقل من ٣٠ ) والانحراف المعياري للمجتمع غير معروفاً .

وفي سنة ١٩٠٨ قدم وليم جوست توزيع (ت) والذي عرف بعد ذلك باسم توزيع ستيودنت Student Distribution .

فإذا كان لدينا متغيران مستقلان (س، ص) وكان المتغير (س) يتبع التوزيع الطبيعي المعياري والمتغير (ص) يتبع توزيع كا<sup>٢</sup> بدرجات حرية (ن) فإن :

$$ع = س + \sqrt{\frac{ص}{ن}}$$

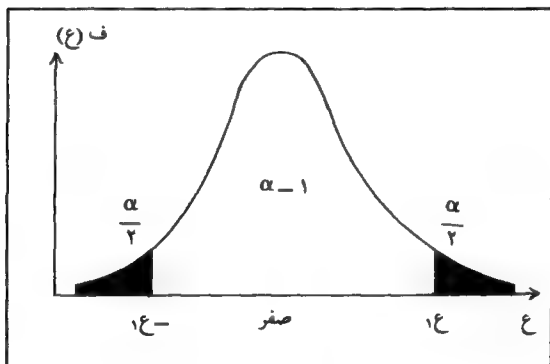
يتبع توزيع (ت) بدرجات حرية (ن) حيث دالة الاحتمال لهذا التوزيع تأخذ الصورة التالية :

$$ف(ع) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1+n}{2}} \left( \frac{ع^2}{ن} + 1 \right)^{-\frac{1+n}{2}}$$

حيث (أ) مقدار ثابت ، (ن) هي درجات الحرية والتي تحدد شكل التوزيع .

وتوزيع (ت) مثل التوزيع الطبيعي فهو توزيع احتمالي متصل ومتماثل ولكنه لا يلمس المحور الأفقي كالتوزيع الطبيعي كما أنه أكثر تشتتاً من التوزيع الطبيعي ويزداد هذا التشتت كلما قلت درجات الحرية عن القيمة ٣٠ ويقل هذا التشتت إلى أن يتساوى مع تشتت التوزيع الطبيعي عندما تزيد درجات الحرية عن ٣٠ . ومن خصائص توزيع (ت) أيضاً أنه متماثل حول الصفر .

وباستخدام هذه الخصائص يمكن تحديد المساحة في طرف التوزيع (ت) على النحو التالي :



في الشكل السابق نفترض أن المطلوب هو معرفة القيمة على المحور الأفقي (١ع) التي تكون المساحة قبلها (أو بعدها) تساوي المقدار



(  $\frac{\alpha}{2}$  ) عند درجات الحرية (ن) حيث :

$$١٤ = ت (ن ، \frac{\alpha}{2}) = - ت (ن ، ١ - \frac{\alpha}{2}) \text{ نظراً لتمثل التوزيع}$$

وهي التي نحصل عليها من جدول قيم توزيع (ت) (جدول ٣) وفيه يخصص العمود الأول لدرجات الحرية وبقية الأعمدة تمثل قيمة (ت) على المحور الأفقي التي تعطي احتمالات مختلفة في ذيل التوزيع سواء من ناحية اليمين أو من ناحية اليسار أي أن الجدول يعطي المساحة المظللة الموضحة في الشكل السابق .

مثال (١٠ - ٢٨) :

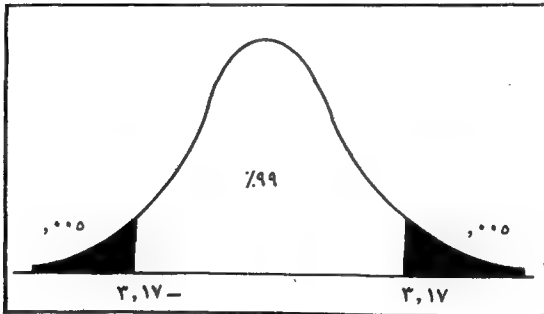
أوجد قيمة (ت) التي تكون المساحة قبلها أو بعدها مساوية (٠,٠٠٥) إذا كانت درجات الحرية تساوي ١٠ .

الحل :

باستخدام جدول (٣) نجد أن :

$$ت (١٠ ، ٠,٠٠٥) = - ت (١٠ ، ٠,٩٩٥) = ٣,١٧$$

ويمكن توضيحها في الشكل التالي :



وهو ما سوف نحتاج إليه عند دراستنا لاختبارات الفروض الاحصائية .

مثال ( ١٠ - ٢٩ ) :

أوجد قيمة ما يلي :

ت ( ١٥ ، ٠٢٥ ) ، ت ( ٢٠ ، ٢ ) ، ت ( ١٠ ، ٠٥ ) ،

الحل :

من جدول (٣) نجد أن :

ت ( ١٥ ، ٠٢٥ ) = ٢,١٣

ت ( ٢٠ ، ٢ ) = ٠,٨٦

ت ( ١٠ ، ٠٥ ) = ١,٨١

رابعاً : توزيع (ف) F - Distribution :

هذا التوزيع أيضاً من التوزيعات الهامة في اختبارات الفروض الاحصائية وتحليل التباين ولقد عرف بهذا الاسم تكريماً للعالم الاحصائي فيشر Fisher وقد يشار في بعض الأحيان لهذا التوزيع باسم نسبة التباين Variance Ratio .

ولإيجاد دالة احتمال هذا التوزيع نفترض أن لدينا متغيرين مستقلين ( س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ) كل منهما يتبع توزيع كاي<sup>٢</sup> بدرجات حرية ( ن<sub>١</sub> ، ن<sub>٢</sub> ) على الترتيب . وعليه فإن المتغير :

$$س = \left( \frac{س_٢}{ن_٢} \right) \div \left( \frac{س_١}{ن_١} \right)$$

يتبع توزيع (ف) بدرجات حرية ( ن<sub>١</sub> ، ن<sub>٢</sub> ) والتي يتوقف عليهما شكل التوزيع ، ودالة كثافة احتماله تأخذ الصورة التالية :



مثال ( ١٠ - ٣٠ ) :

باستخدام جدول قيم توزيع (ف) أوجد القيمة التي تناظر درجات

$$\text{الحرية } n_1 = 10 , n_2 = 20$$

الحل :

للكشف في جدول توزيع (ف) يلزم معرفة مستوى المعنوية ( المساحة في ذيل التوزيع ) .

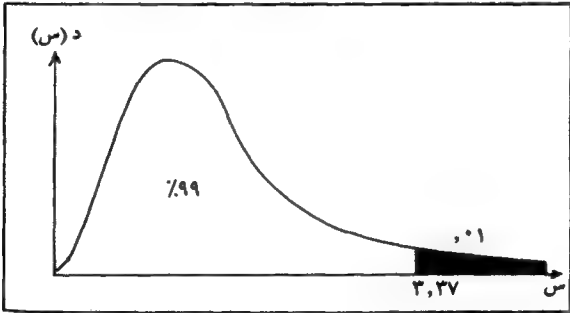
أ - نفترض أن مستوى المعنوية = ٠,٠١

∴ من جدول (٤) نجد أن :

$$f(10, 20, 0.01) = 3.37$$

وذلك بالنظر تحت العمود الذي به درجات الحرية (١٠) وأمام الصف

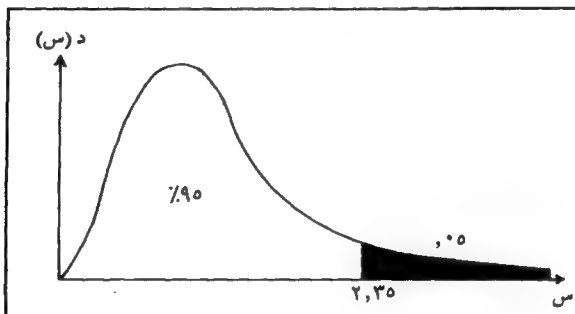
الذي به درجات حرية (٢٠) ويمكن توضيح ذلك في الشكل التالي :



ب - بافتراض أن مستوى المعنوية = ٠,٠٥

$$\therefore f(10, 20, 0.05) = 2.35$$

وذلك بالنظر في الجدول الخاص بمستوى المعنوية ٠٥ , تحت العمود الذي به درجات الحرية (١٠) وأمام الصف الذي به درجات الحرية (٢٠) .  
ويمكن توضيح ذلك أيضاً في الشكل التالي :



مثال ( ١٠ - ٣١ ) :

باستخدام جدول قيم توزيع (ف) أوجد القيم التالية :

أ - ف ( ٣ , ٩ , ٠١ ) ,

ب - ف ( ٥ , ١٢ , ٠٥ ) ,

ج - ف ( ٤ , ١١ , ٠١ ) ,

الحل :

بالكشف في جدول (٤) نجد أن :

أ - ف ( ٣ , ٩ , ٠١ ) = ٦,٩٩

ب - ف ( ٥ , ١٢ , ٠٥ ) = ٣,١١

ج - ف ( ٤ , ١١ , ٠١ ) = ٥,٦٧

## تمارين الفصل العاشر

(١) متغير عشوائي (س) يتبع التوزيع الطبيعي حيث  $\mu = 30$  ،  $\sigma = 5$  ،

أوجد قيمة (ي) المعيارية المقابلة لكل قيمة من قيم (س) التالية :

$$\text{س} = 25 \quad , \quad \text{س} = 30 \quad , \quad \text{س} = 37,5$$

$$\text{س} = 10 \quad , \quad \text{س} = 50 \quad , \quad \text{س} = 32$$

(٢) بالنسبة للمتغير (س) في التمرين رقم (١) .. كم من الانحراف

المعياري بعيداً عن الوسط الحسابي تبعد كل من القيم التالية :

$$\text{س} = 10 \quad , \quad \text{س} = 32,5 \quad , \quad \text{س} = 30 \quad , \quad \text{س} = 60$$

(٣) أوجد قيمة س التي تحقق :

$$\text{أ - ح (ي < س)} = 0,0013$$

$$\text{ب - ح (-ص > ي > ص)} = 0,95$$

$$\text{ج - ح (-ص > ي > ص)} = 0,90$$

$$\text{د - ح (-ص > ي > ص)} = 0,6826$$

$$\text{هـ - ح (-ص > ي > صفر)} = 0,0596$$

(٤) إذا كان المتغير العشوائي (س) يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 100

وتباين 64 . ارسم مخططاً لشكل المنحنى الطبيعي والمساحة

المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية ثم أوجد قيمة احتمال

حلوئها :

$$\text{أ - ح (} \mu - \sigma < \text{س} < \mu + \sigma \text{)} = 0,52$$

$$\text{ب - ح (س} \leq 108 \text{)}$$

$$\text{ج - ح (س} \geq 92 \text{)}$$

د - ح (  $92 \geq \text{ص} \geq 116$  )

هـ - ح (  $92 \geq \text{ص} \geq 96$  )

و - ح (  $76 \geq \text{ص} \geq 124$  )

ز - ح (  $102 \geq \text{ص} \geq 110$  )

(5) في تجربة رمي زهرتي نرد أوجد :

أ - احتمال الحصول على مجموع يساوي 5 .

ب - احتمال الحصول على مجموع يساوي 11 على الأقل .

جـ - احتمال الحصول على مجموع يساوي 3 على الأكثر .

(6) كيس به 7 كرات بيضاء ، 4 كرات حمراء . سحب كرتان على

التوالي أوجد احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين إذا كان :

أ - السحب يتم بإرجاع .

ب - السحب يتم بدون إرجاع .

(7) عند إلقاء أربع قطع نقود متوازنة وكانت (س) ترمز إلى عدد مرات ظهور

الشعار . أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) ومن ثم

أوجد دالة الاحتمال التجميعية وارسم كل منهما ثم اشتق توقع وتباين

(س).

(8) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير (ص) في الصورة :

$$\text{ف (ص)} = \frac{1}{30} \quad \text{صفر} \geq \text{ص} \geq 30$$

= صفر      خلاف ذلك

أ - أوجد توقع (ص) ، تباين (ص).

ب - أوجد دالة الاحتمال التجميعية .

جـ - أوجد ح (  $25 > \text{ص} > 30$  ) .





الفصل الحادي عشر  
تقدير فترات الثقة  
واختبارات الفروض الاحصائية  
**Estimation of Confidence Intervals  
and Hypothesis Testing**

مقدمة :

تركزت دراستنا في الفصول السابقة على تقدير معالم التوزيع الاحتمالي لظواهر معينة ( مثل الوسط الحسابي والانحراف المعياري ، ... ) وذلك باستخدام أسلوب العينة ، أي من خلال بيانات مأخوذة عن أجزاء من المجتمع الكلي للظواهر محل الدراسة .

فإذا سحبنا عينة حجمها (ن) مفردة من مجتمع دراسة معين فإننا نستطيع حساب بعض الاحصاءات مثل الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري ، وغيرهما . وهذه المقاييس الاحصائية تختلف باختلاف العينة المسحوبة من مجتمع الدراسة ، ولذلك إذا سحبنا مجموعة من العينات ذات الحجم (ن) من مجتمع الدراسة فإننا سوف نحصل من كل واحدة على مقاييس تختلف عن بعضها البعض لنفس المعالم وبذلك نحصل على توزيع يسمى بتوزيع المعاينة لهذه المعالم . فمثلاً إذا كان المقياس الاحصائي المطلوب هو الوسط الحسابي فإن توزيعه من العينات المختلفة يسمى بتوزيع العينة للمتوسطات الحسابية أو توزيع المعاينة للوسط الحسابي .

وفي كثير من المشاكل العملية قد نحتاج إلى اتخاذ قرارات تخص مجتمع الدراسة وذلك على ضوء نتائج دراسة لعينة من هذا المجتمع . ومثل هذه القرارات تسمى بالقرارات الإحصائية . فعلى سبيل المثال ، قد نحتاج أن نقرر بناء على بيانات عينة ما إذا كان دواء جديد يؤثر بشكل حقيقي في شفاء مرض معين ، وما إذا كانت طريقة إنتاج أكثر ربحية من طريقة أخرى . وكذلك قد نحتاج إلى تحديد للدرجة ثقتنا في التقديرات التي حصلنا عليها لمعالم المجتمع أو نسب الحدوث فيه .

ولذلك سوف يعالج هذا الفصل :

١ — بناء فترات الثقة لمعالم المجتمع ونسب الحدوث فيه .

٢ — اختبارات الفروض الإحصائية .

## أولاً : تقدير فترات الثقة

### Estimation of Confidence Intervals

يمكن بناء فترات الثقة لمعالم المجتمع مثل الوسط الحسابي وذلك باستخدام معلوماتنا عن التوزيعات الاحتمالية في الفصل السابق وكذلك باستخدام القاعدة التالية : —

قاعدة :

إذا كان هناك عينة حجمها (ن) مفردة مأخوذة من مجتمع (س) توقعه  $(\mu)$  وتباينه  $(\sigma^2)$  فإن المتوسط الحسابي  $\bar{x}$  هو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع  $(\mu)$  وتباين  $\frac{\sigma^2}{n}$  . أي أنه إذا كانت  $(\sigma)$  هي الانحراف المعياري للمتغير (س) فإن الانحراف المعياري للوسط الحسابي  $\bar{x}$  لعينة عدد مفرداتها (ن) هو  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  ويسمى بالخطأ المعياري تمييزاً له عن الانحراف المعياري للمتغير نفسه .

ولهذه القاعدة أهمية خاصة في تقدير مركز المجتمع كما يتضح فيما يلي :

(أ) تقدير القيمة المتوقعة لمركز المجتمع  $(\mu)$  بفتره ثقة من بيانات عينة :

١ — عندما يكون تباين المجتمع  $(\sigma^2)$  معلوماً :

تمثل خطوات إيجاد تقديرات لمركز المجتمع  $(\mu)$  على النحو التالي : —

— نحسب الوسط الحسابي من بيانات العينة .

— نحسب الانحراف المعياري للمتوسط الحسابي أي الخطأ

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \text{المعياري}$$

— باستخدام القاعدة السابقة والتحويل (ى) في الفصل السابق فإن

$$\text{المتغير } ى = \frac{\mu - \bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ يتبع التوزيع الطبيعي المعياري}$$

ويافترض فترة ثقة ٩٥٪ نعلم أن :

$$ح ( - ١,٩٦ < ى < ١,٩٦ ) = ٩٥ \%$$

$$ح ( - ١,٩٦ < \frac{\mu - \bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < ١,٩٦ ) = ٩٥ \%$$

$$ح ( - ١,٩٦ < \frac{\mu - \bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < ١,٩٦ ) = ٩٥ \%$$

أي أن :

$$ح ( \bar{x} - ١,٩٦ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + ١,٩٦ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ) = ٩٥ \%$$

أي أن القيمة المتوقعة للمجتمع (  $\mu$  ) سوف تنحصر في الفئة :

$$( \bar{x} - ١,٩٦ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + ١,٩٦ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ) \text{ بثقة } ٩٥ \%$$

وبالمثل فإن :

$$ح ( \bar{x} - ٢,٥٨ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + ٢,٥٨ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ) = ٩٩ \%$$

أي أن القيمة المتوقعة ( $\mu$ ) سوف تنحصر في الفئة :

$$\left( \bar{x} - 2,08 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2,08 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \text{ بثقة } 99\%$$

مثال (١١-١) :

أخذت عينة عشوائية حجمها ٤ مفردات من مجتمع طبيعي توقعه ( $\mu$ ) وتباينه ٠,٤ ، وكانت المشاهدات هي ١٤,٨ ، ١٥,٤ ، ١٥,٦ ، ١٤,٢ ، أوجد تقديراً للمتوسط الحسابي للمجتمع بثقة ٩٥% .

الحل :

$$n = 4$$

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع}}{n} = \frac{60}{4} = 15$$

$$\sigma = \sqrt{0,4} = 0,2$$

$$ح \quad \left( \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 1,96 < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 1,96 \right) = 90\%$$

$$ح \quad \left( 15 - \frac{0,2}{2} 1,96 < \mu < 15 + \frac{0,2}{2} 1,96 \right) = 90\%$$

$$ح \quad (15 - 0,196 < \mu < 15 + 0,196) = 90\%$$

أي أن القيمة المتوقعة للمجتمع ( $\mu$ ) تنحصر في الفئة

$$(15,196, 14,804) \text{ بثقة } 90\% .$$

٢ - عندما يكون تباين المجتمع ( $\sigma^2$ ) غير معلوم :

إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العينة له توزيع طبيعي توقعه ( $\mu$ )

وتباينه ( $\sigma^2$ ) غير معلوم فيمكننا باستخدام بيانات العينة إيجاد تقدير غير متحيز للتباين ( $\sigma^2$ ) باستخدام التقدير :

$$ع^2 = \frac{1}{n-1} \{ \text{مجم}^2 - \frac{(\text{مجم})^2}{n} \}$$

وفي هذه الحالة يصبح المتغير العشوائي :

$$ت = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{ع}{n}}} \text{ له توزيع (ت) بدرجات حرية } (n-1).$$

وبعد حساب هذه القيمة لحدود الثقة المعلومة من جدول توزيع (ت) نستخدم العلاقة التالية والتي تعطي فترة ثقة  $100(1-\alpha)\%$  للقيمة المتوقعة ( $\mu$ ) .

$$\text{ح (ت) } \bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \sqrt{\frac{ع}{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \sqrt{\frac{ع}{n}}$$

$$= 100(1-\alpha)\% .$$

حيث ( $\alpha$ ) ترمز إلى مستوى المعنوية .

مثال (١١-٢) :

أخذت عينة عشوائية حجمها ٤ مفردات من مجتمع طبيعي توقعه ( $\mu$ ) وتباينه ( $\sigma^2$ ) وكانت المشاهدات هي : -

$$١٤,٨ \quad , \quad ١٥,٤ \quad , \quad ١٥,٦ \quad , \quad ١٤,٢$$

أوجد تقديراً لمركز المجتمع ( $\mu$ ) بثقة ٩٩% (عند مستوى معنوية ٠,٠١) .

الحل :

$$15 = \frac{60}{4} = \frac{\text{مجموع}}{n} = \overline{(مس)} = \text{الوسط الحسابي للعينة}$$

ولتقدير التباين نستخدم العلاقة :

$$ع^2 = \frac{1}{3} (901,2 - \frac{60^2}{4}) = 399,$$

$$ع = 632.$$

ومن جدول توزيع (ت) نجد أن : ت = 3, 0.1 = 0,841

∴ القيمة المتوقعة للمجتمع (μ) تنحصر في الفئة :

$$(15 - 0,841 \times \frac{632}{2}, \frac{632}{2} \times 0,841 + 15) \text{ بثقة } 99\%$$

أي في الفئة (16,846 ، 13,154) بثقة 99% .

ملاحظة هامة :

ذكرنا فيما سبق أن توزيع (ت) يؤول إلى التوزيع الطبيعي عندما تكبر (ن) كبيراً كافياً ، وعليه فعندما تكون (ن < 30) وإذا كان تباين المجتمع غير معلوم يمكننا حساب (ع<sup>2</sup>) كتقدير غير متحيز للتباين ثم نوجد فترة ثقة باستخدام التوزيع الطبيعي كما سبق في الحالة (1) .

(ب) تقدير فترة الثقة لنسبة الحدوث في المجتمع :

عند دراسة نسبة حدوث ظاهرة ما في المجتمع مثل نسبة الأمية في المجتمع أو نسبة المعيب في انتاج معين أو نسبة الذين يزيد عمرهم عن سن معينة . فإذا أجرى بحث معين على مجتمع معين حجمه (ن) وكان عدد مرات الحدوث هو (ك) فإن نسبة الحدوث في المجتمع  $ح = \frac{ك}{ن}$  وغالباً ما تكون هذه النسبة غير معلومة ويصبح من الضروري تقدير هذه النسبة

باستخدام عينة عشوائية مأخوذة من هذا المجتمع حجمها (ن) ، ومن ثم  
 فيمكننا الحصول على تقدير نسبة الحدوث في المجتمع على النحو التالي :  
 $\hat{X} = \frac{J}{N}$  حيث J تمثل عدد مرات الحدوث في العينة .

ولقد ثبت أنه عندما تكون (ن) كبيرة وحينما لا تكون النسبة في  
 المجتمع صغيرة جداً أو كبيرة جداً فإن النسبة  $\hat{X}$  تقترب من التوزيع الطبيعي

$$\text{بتوقع } H \text{ وتباين } \frac{H(1-H)}{N}$$

وعليه فإن المتغير العشوائي :

$$Y = \frac{\hat{X} - H}{\sqrt{\frac{H(1-H)}{N}}}$$

له توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري . وحيث أن (ح) غير  
 معلومة فنستخدم النسبة :

$$\frac{\hat{X}(1-\hat{X})}{N} \text{ كتقدير غير متحيز للتباين } \frac{H(1-H)}{N}$$

وباستخدام العلاقات السابقة يمكن التوصل إلى أن :

(١) نسبة الحدوث في المجتمع (ح) تقع في الفترة :

$$(\hat{X} - 1,96 \sqrt{\frac{\hat{X}(1-\hat{X})}{N}}, \hat{X} + 1,96 \sqrt{\frac{\hat{X}(1-\hat{X})}{N}}) \text{ بثقة } 90\%$$

(٢) نسبة الحدوث في المجتمع (ح) تقع في الفترة :



$$(\bar{X} - 2,08) \sqrt{\frac{\bar{X}(\bar{X}-1)}{n}} + 2,08 \sqrt{\frac{\bar{X}(\bar{X}-1)}{n}} \text{ بثقة } 99\%$$

مثال ( ١١ - ٣ ) :

في محاولة لتقدير نسبة الأمية في مدينة ما أخذت عينة عشوائية مكونة من ٢٠٠ شخص فكان عدد الأميين ١٢٠ شخصاً . قدر نسبة الأمية في المدينة بثقة ٩٥ % . وإذا كان عدد السكان في هذه المدينة يقدر بـ ٢٠٠٠٠ نسمة . أوجد تقدير لعدد الأميين بها .

الحل :

$$\text{نسبة الأمية في العينة } \bar{X} = \frac{120}{200} = 0,6$$

∴ نسبة الأمية في المدينة (ح) تقع في الفترة :

$$(\bar{X} - 1,96) \sqrt{\frac{\bar{X}(\bar{X}-1)}{n}} + 1,96 \sqrt{\frac{\bar{X}(\bar{X}-1)}{n}} \text{ بثقة } 95\%$$

$$\frac{0,6 \times 0,4}{200} \sqrt{\quad} \quad 1,96 - 0,6 = \text{الحد الأدنى لفترة الثقة}$$

$$= 0,6 - 0,032 = 0,568$$

$$\text{والحد الأعلى لفترة الثقة} = 0,6 + 0,032 = 0,632$$

أي أن نسبة الأمية في المدينة تقع بين ( ٥٣٢ ، ٦٦٨ ) بثقة ٩٥ %  
كما أن عدد الأميين في هذه المدينة يتراوح بين ( ١٠٦٤٠ ، ١٢٣٦٠ ) .

## ثانياً : اختبارات الفروض الاحصائية

### Test of Hypothesis

الفروض الاحصائية Statistical Hypothesis :

في محاولة للوصول إلى قرار إحصائي فمن المفيد وضع فروض وتخمينات أو تقارير مبدئية عن معالم التوزيع الاحتمالي لمجتمعات الظواهر موضع الدراسة . مثل هذه الفروض أو التقارير المبدئية والتي قد تكون صحيحة أو غير صحيحة ، تسمى بالفروض الاحصائية ، ويسمى الفرض الاحصائي عادة بفرض العدم Null Hypothesis أي عدم التغير بمعنى أنه تحديد مبدئي لقيمة المعلمة Parameter أو المؤشر الإحصائي موضوع الاختبار فإذا قبلنا هذه القيمة نتيجة للاختبار كان معنى ذلك أنه لم يحدث تغير معنوي أو أساسي في قيمة هذا المؤشر أما إذا رفضنا الفرض العدمي نتيجة للاختبار كان معنى ذلك أن تغيراً جوهرياً أو معنوياً قد حدث في قيمة المؤشر الاحصائي .

المختبر الاحصائي Test Statistic :

هو عبارة عن علاقة رياضية تربط المعلمة التي يجري الاختبار عليها بقيمتها المحسوبة من العينة المأخوذة من المجتمع لذلك فإن المختبر الاحصائي هو دالة في قيم مفردات العينة وبالتالي فهو متغير عشوائي له دالة توزيع احتمالي يلزم أن يكون معلوماً لاستخدامه في اختبارات الفروض .

فمثلاً إذا أردنا اختبار أن قيمة توقع مجتمع هي  $(\mu_0)$  ( أي أن الفرض العدمي قبل إجراء الاختبار هو  $\mu_0 = \mu_0$  ) وإذا كانت  $\mu_1$  هي

الوسط الحسابي المحسوب من بيانات عينة من المجتمع حجمها (ن) كتقدير للقيمة المتوقعة فإن :

$$y = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

حيث (  $\sigma$  ) هي القيمة الحقيقية للانحراف المعياري في المجتمع، هي متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري وتسمى بالمختبر الاحصائي . ونتيجة لمعرفة التوزيع الاحتمالي للمختبر الاحصائي فإننا نستطيع مقارنة قيمته المحسوبة بقيمته المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ومن ثم نستطيع قبول أو رفض الفرض العدمي .

الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني :

**Type 1 Error and Type 2 Error :**

نتيجة للقرارات الاحصائية المتخذة بناء على معلومات عينة حول فروض إحصائية معينة يمكن التمييز بين أربع حالات ممكنة هي :

١ - أن يكون الفرض الإحصائي صحيحاً ، والقرار بناء على الاختبار الاحصائي يقول بأنه صحيح ( لا خطأ هنا ) .

٢ - أن يكون الفرض الاحصائي صحيحاً والقرار يقول بأنه خاطئ ( هنا نرتكب خطأ نسميه بخطأ من النوع الأول ) .

٣ - أن يكون الفرض الاحصائي خاطئاً والقرار يقول بأنه صحيح ( هنا نرتكب خطأ نسميه بخطأ من النوع الثاني ) .

٤ - أن يكون الفرض الاحصائي خاطئاً والقرار يقول بأنه خاطئ ( لا خطأ هنا )

ولكي تكون اختبارات الفروض أو قواعد اتخاذ القرارات جيدة ، فيجب أن تصمم بحيث تؤدي إلى تقليل أخطاء القرار . ولكن ذلك ليس بالأمر السهل حيث أن نقص أحد أنواع الأخطاء يؤدي بشكل عام إلى زيادة في النوع الآخر ( مع بقاء حجم العينة ثابت ) . ومن الناحية العملية فإن أحد الأخطاء قد يكون أكثر أهمية من النوع الآخر ، لذلك فإن الحل الوسط هو بتحديد الخطأ الأكثر أهمية وخطورة . والطريقة الوحيدة في تقليل حجم الخطأين هي بزيادة حجم العينة وقد يكون ذلك غير ممكن أو مكلف .

#### مستوى المعنوية Level of Significance :

هو احتمال الخطأ الذي يحدده الباحث لنفسه قبل بداية الاختبار في رفض الفرض الصحيح ، وبمعنى آخر هو المخاطرة المحتملة في رفض الفرض الإحصائي عندما يكون صحيحاً ( الخطأ من النوع الأول ) ويرمز له بالرمز  $\alpha$  .

ومن الناحية العملية فإننا نستخدم عادة مستوى معنوية ٠٥ ، أو ٠١ ، وإن كانت هناك قيم أخرى مختلفة . وعلى سبيل المثال ٠٥ ، تعني أن هناك ٥ فرص من ١٠٠ أننا سوف نرفض الفرض الإحصائي عندما يجب أن نقبله ، أي أننا واثقون من قرارنا بنسبة ٩٥٪ في أننا ستتخذ القرار السليم . ونقول في هذه الحالة بأننا رفضنا الفرض العدمي عند مستوى معنوية ٠٥ .

#### الفرض البديل Alternative Hypothesis :

في أي اختبار إحصائي للفروض يوجد لكل فرض علمي فرض بديل مناظر له . فعلى سبيل المثال إذا كان الفرض العدمي هو  $\mu = \mu_0$  .

فإن الفرض البديل من الممكن أن يكون :

$$\mu > \mu_0 \quad \text{أو} \quad \mu < \mu_0 \quad \text{أو} \quad \mu \neq \mu_0$$

ومعرفة الفرض البديل ضرورية جداً في تحديد الخطأ من النوع الثاني وكذلك في تحديد نوع الاختبار الذي بمقتضاه قد تقبل أو نرفض الفرض العدمي . وهناك ثلاثة أنواع شائعة من الاختبارات هي : -

#### (١) اختبار الطرف الأيسر Left Side Test :

يجري هذا الاختبار عندما يكون الفرض العدمي  $\mu = \mu_0$  في مقابل الفرض البديل  $\mu > \mu_0$  .



فإذا كانت القيمة (ى) المحسوبة أقل من القيمة (س) المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وفقاً لمستوى المعنوية المعروف مسبقاً فإننا نرفض الفرض أما إذا كانت (ى) أكبر من (س) فإننا نقبل الفرض .

#### (٢) اختبار الطرف الأيمن Right Side Test :

يجري هذا الاختبار عندما يكون الفرض العدمي  $\mu = \mu_0$  في مقابل الفرض البديل  $\mu < \mu_0$  .



فإذا كانت القيمة (ي) المحسوبة أكبر من القيمة (ص) المستخرجة من الجدول عند مستوى المعنوية المحدد فإننا نرفض الفرض العدمي والعكس صحيح إذا كانت (ي) أقل من (ص) فإننا نقبل الفرض .

### (٣) اختبار الطرفين Two-Tailed Test :

يجري هذا الاختبار عندما يكون الفرض العدمي  $\mu = \mu_0$  في مقابل الفرض البديل  $\mu \neq \mu_0$  .



وفي هذه الحالة فإننا نقبل الفرض العدمي إذا كانت قيمة (ي) المحسوبة داخلية في الفترة (س ، ص) المستخرجة من الجدول والعكس الصحيح مع ملاحظة أن  $س - ص$  حيث أن التوزيع متماثل .

وسوف نعرض فيما يلي بعض النماذج من اختبارات الفروض :

### (١) اختبارات الفروض الإحصائية للقيمة المتوقعة ( المتوسط ) للمجتمع :

( أ ) عندما يكون تباين المجتمع الأصلي (  $\sigma^2$  ) معلوماً :

نفرض أننا سحبنا عينة من مجتمع دراسة موزع توزيعاً طبيعياً بتوقع (  $\mu$  ) وتباين (  $\sigma^2$  ) ، فإذا كانت (  $\sigma^2$  ) معلومة ، فإن اختبارات الفروض الإحصائية المتعلقة بقيمة (  $\mu$  ) ( توقع المجتمع ) تعتمد على توزيع المعاينة للمتغير  $\bar{x}$  ( الوسط الحسابي للعينة ) وحيث أن  $\bar{x}$  يتوزع توزيعاً

طبيعياً بتوقع ( $\mu$ ) وانحراف معياري  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ، وحيث ان قيمة ( $t_0$ ) للمجتمع معلومة ، كذلك فإن :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

هو عبارة عن متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري ، يمكن استخدام هذه النتيجة في اختبار الفروض الاحصائية المتعلقة بالقيمة المتوقعة للمجتمع وذلك باتباع الخطوات التالية :

- (١) نحدد الفرض الأصلي ( الفرض العدمي ) .
- (٢) نحدد الفرض البديل ، ومنه يتحدد نوع الاختبار واتجاهه ( من طرف واحد أو طرفين ) .

(٣) تحديد التوزيع المستخدم في الاختبار .

(٤) تحديد منطقة قبول ورفض الفرض العدمي ، أي بمعنى آخر تحديد مستوى المعنوية ( وغالباً ما تأخذ ٠,٠٥ أو ٠,٠١ ) والذي يحدد الحدود الفاصلة بين منطقتي القبول أو الرفض بناء على نوع الاختبار ونوع التوزيع المستخدم .

(٥) تحسب قيمة المختبر الاحصائي المناسب من بيانات العينة ، وبناء على قيمته يمكن تحديد قبول أو رفض فرض العدم . فإذا وقعت قيمة المختبر الاحصائي المحسوب من العينة في منطقة الرفض ، نرفض فرض العدم والعكس صحيح كما يتضح في الأمثلة التالية .

\* حتى إذا لم يكن توزيع المجتمع الأصلي طبيعياً فإن توزيع (ت) في

هذه الحالة يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري إذا كان حجم العينة كبيراً  $(n \leq 30)$  في العادة .

مثال ( ١١ - ٤ ) :

شركة أجهزة كهربائية تنتج نوعاً من لمبات الإضاءة . فإذا علم أن عمر اللمبة يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط ١٧٥٠ ساعة وتباين ١٤٤ ساعة . وأرادت الشركة أن تختبر جودة انتاجها فأخذت عينة من ٣٦ لمبة ووجد أن متوسط عمرها ١٧٣٠ ساعة . فهل يستدل من هذه العينة أن متوسط عمر اللمبة قد انخفض ( أي أن إنتاج الشركة قد ساء عن المعدل المعروف ) وذلك بمستوى معنوية ٠,٠٥

الحل :  $\mu = 1750$  ،  $\sigma^2 = 144$  ،  $n = 36$  ،  $\bar{x} = 1730$

الفرض العدمي :  $\mu = 1750$  ( بمعنى أن إنتاج الشركة لم يتغير ) .

الفرض البديل :  $\mu > 1750$  ( بمعنى أن إنتاج الشركة قد ساء عن المعدل ) .

يتضح من الفرض البديل أنه يجب اتباع اختبار الطرف الأيسر والتوزيع المستخدم هو توزيع  $\bar{x}$  ويتبع التوزيع الطبيعي وعليه فسوف نرفض الفرض العدمي إذا كانت قيمة المختبر الإحصائي أقل من القيمة ( - ١,٦٤٥ ) المستخرجة من الجدول الطبيعي المعياري عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ كما يتضح في الشكل .

والمختبر الإحصائي هو :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1730 - 1750}{\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{36}}} = \frac{-20}{\frac{12}{6}} = \frac{-20}{2} = -10$$





الفرض العلمي :  $\mu = 100$  ( أي أن الأسلوب الجديد لم يؤثر في زيادة الإنتاج ) .

الفرض البديل :  $\mu < 100$  ( يعني أن الإنتاج قد زاد باستخدام الأسلوب الجديد ) .

ويتضح من الفرض البديل أنه يجب استخدام اختبار الطرف الأيمن وعليه فسوف نرفض الفرض العلمي إذا كانت قيمة المختبر الإحصائي المحسوبة أكبر من القيمة المناظرة لها في جدول التوزيع عند مستوى المعنوية المحدد .

والمختبر الإحصائي هو :

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

يتبع التوزيع الطبيعي المعياري

$$\frac{5}{2} = \frac{100 - 100}{\frac{16}{\sqrt{64}} + 8} = 2,5$$



وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن القيمة المناظرة لها عند مستوى المعنوية 0,05 يساوي 1,645 .

وحيث أن القيمة المحسوبة أكبر من القيمة المستخرجة من الجدول فلنأخذ نرفض الفرض العلمي القائل بأنه ليس هناك تأثير على الإنتاج باستخدام الأسلوب الجديد وبعبارة أخرى فإنه يمكن القول أن هناك تأثيراً على زيادة الإنتاج نتيجة استخدام الأسلوب الجديد بثقة 95% .

(ب) عندما يكون تباين المجتمع الأصلي (  $\sigma^2$  ) مجهولاً :

في هذه الحالة نستخدم التقدير :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \{ \text{مجم } s^2 - \frac{(\text{مجم } s)^2}{n} \}$$

كتقدير غير متحيز للتباين وبالتالي فإن المختبر الإحصائي :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s \div \sqrt{n}}$$

يتبع التوزيع (ت) بدرجات حرية (  $n - 1$  ) ومن ثم فإن طريقة الاختبار في هذه الحالة لا تختلف عن الطريقة السابقة إلا في استخدام توزيع (ت) بدلاً من التوزيع الطبيعي .

مثال ( ١١ - ٦ ) :

مصنع للمعادن ينتج نوعاً من السبائك المخلوطة من عدة معادن علماً بأن هذا النوع من الخليط ينصهر عند درجة حرارة ١٤٩٥ درجة مئوية . وللتأكد من كفاءة أجهزة المصنع أخذت عينة من السبائك المصنوعة في ٧ أيام مختلفة فكانت درجة انصهارها كالآتي :

١٥٠٩ ، ١٥٠٦ ، ١٤٩٣ ، ١٤٩٩ ، ١٥٠٥ ، ١٤٨٣ ، ١٤٩٤ .

اختبر ما إذا كانت هذه العينة تتفق مع درجة انصهار الخليط عند مستوى معنوية ٠,٠٥

الحل :  $\mu = 1495$  ،  $n = 7$

ومن بيانات العينة يمكن تقدير الوسط الحسابي والانحراف المعياري على النحو التالي :

$$\text{مجم} = \frac{\text{مجم س}}{n} = 1497,71$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{1}{\text{مجم س} - \frac{\text{مجم س}^2}{n}} \text{ وبالتعويض نجد أن}$$

$$\text{ع} = 8,616$$

الفرض العدمي :  $\mu = 1495$

الفرض البديل :  $\mu \neq 1495$  ( نستخدم اختبار الطرفين )

المختبر الاحصائي هو :

$$t = \frac{\text{مجم} - \mu}{\sqrt{\frac{\text{ع}}{n}}} \text{ يتبع توزيع (ت) بـ درجات حرية } n$$

$$= \frac{1497,71 - 1495}{\sqrt{\frac{8,616}{7}}} = 0,832$$

وبالبحث في جدول توزيع (ت) مقابل درجة الحرية (٦) عن قيمة

(ت) التي تحقق  $\frac{\alpha}{2} = 0,025$ ، فنجد أنها تساوي ٢,٤٥ ونظراً للتمائل فإن

القيمة الأخرى هي ( - ٢,٤٥ ) .



وحيث أن قيمة (ت) المحسوبة من العينة تقع في منطقة القبول فإننا نقبل الفرض العلمي القائل بأن هذه العينة تنتمي إلى ذلك الخليط الذي ينصهر عند درجة حرارة ١٤٩٥ درجة مئوية بدرجة ثقة ٩٥٪ .

مثال (١١ - ٧) :

إذا علمت أن مستوى الدخل الشهري في بلد ما هو ٢٠٥ دينار ، ولكن إحدى المؤسسات الدولية ادعت بأنه أقل من ذلك ولاختبار هذا الادعاء أخذت عينة من ٣٠ مفردة من هذا المجتمع وحسب متوسطها الحسابي (متوسط الدخل الشهري) فكان ١٦٤,٥ دينار وتباينها ١٩٦ .  
اختبر فرض العدم عند مستوى معنوية ٠,٠١ .

الحل :

$$\mu = 205 , \quad n = 30 , \quad \bar{x} = 164,5 , \quad s^2 = 196$$

الفرض العلمي :  $\mu = 205$

الفرض البديل :  $\mu > 205$  ( اختبار الطرف الأيسر )

المختبر الإحصائي هو :

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \text{ يتبع توزيع (ت) بدرجات حرية } 29$$

$$10,84 = \frac{40,5}{2,006} = \frac{205 - 164,5}{\sqrt{30} \div 14}$$

وبالكشف في جدول (ت) المقابلة للدرجة الحرية ٢٩ نجد أن قيمة

(ت) التي تجعل مساحة منطقة الرفض ٠,٠١ هي (٢,٠٤٦٣) .

وحيث أن قيمة (ت) المحسوبة أقل من قيمة (ت) الجدولية ، أي أنها

تقع في منطقة الرفض. لذلك فإننا نرفض الفرض العلمي القائل بأن الدخل الشهري للفرد في هذه الدولة هو ٢٠٥ دينار ونقبل ادعاء المؤسسات الدولية في هذا الشأن بثقة ٩٩٪.



(٢) اختبارات الفروض الإحصائية المتعلقة بالقيمة المتوقعة لمجتمعين مستقلين :

لاختبار الفروض الإحصائية المتعلقة بالقيمة المتوقعة لمجتمعين مستقلين نلجأ إلى سحب عينة عشوائية من كلا المجتمعين ونفترض أننا حصلنا على النتائج التالية .

المينة الثانية	المينة الأولى	
$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$	الوسط الحسابي
$s_2$	$s_1$	الانحراف المعياري
$n_2$	$n_1$	حجم العينة

وبافتراض أن  $(\mu_1, \mu_2)$  هي القيمة المتوقعة للمجتمع الأول والثاني على الترتيب . وفي هذه الحالة فإن

الفرض العلمي هو  $(\mu_1 = \mu_2)$  في مقابل أي من الفروض البديلة التالية :

نستخدم اختبار الطرف الأيسر	$\mu_1 > \mu_2$
نستخدم اختبار الطرف الأيمن	$\mu_1 < \mu_2$
نستخدم اختبار الطرفين	$\mu_1 \neq \mu_2$

وتعتمد الاختبارات في هذه الحالة على توزيع العينات للمتغير العشوائي (س<sub>١</sub> - س<sub>٢</sub>) والذي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع (μ<sub>١</sub> - μ<sub>٢</sub>) . وتباين يتوقف على ما إذا كان تباين المجتمعين معلوماً أم لا .

• إذا كان تباين المجتمعين (σ<sub>١</sub><sup>٢</sup> ، σ<sub>٢</sub><sup>٢</sup>) معلوماً فإن :

$$\text{تباين (س}_1 - \text{س}_2) = \text{تباين (س}_1) + \text{تباين (س}_2)$$

$$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} =$$

بافتراض استقلال المجتمعين .

• إذا كان تباين المجتمعين غير معلوماً فنستخدم تقديراً لهما من بيانات العيتين المسحوبتين من كل منهما وهما ع<sub>١</sub> ، ع<sub>٢</sub> ويصبح تقدير تباين الفرق بين المتوسطين هو :

$$\text{تباين (س}_1 - \text{س}_2) = \frac{e_1^2}{n_1} + \frac{e_2^2}{n_2}$$

وفيما يلي نلخص المختبر الإحصائي في كل حالة :

(١) إذا كانت σ<sub>١</sub><sup>٢</sup> ، σ<sub>٢</sub><sup>٢</sup> معلومتي القيمة :

في هذه الحالة نستخدم المختبر الإحصائي :

$$t = \frac{\bar{s}_1 - \bar{s}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وهو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بافتراض صحة الفرض العدمي (  $\mu_1 = \mu_2$  ) . ويجري الاختبار كما سبق بمقارنة قيمة (ى) المحسوبة بالقيمة المناظرة بجدول التوزيع الطبيعي المعياري عند مستوى المعنوية المحدد ونرفض أو نقبل الفرض على حساب نتيجة المقارنة والتي يحددها الفرض البديل ونوع الاختبار المناظر له .

(ب) إذا كانت  $\sigma_1^2$  ،  $\sigma_2^2$  مجهولتين وحجم العييتين كبيراً :

في هذه الحالة نستخدم تقديراتنا لتباين المجتمعين من بيانات العييتين وهما  $\bar{x}_1$  ،  $\bar{x}_2$  . وبافتراض أن حجم العييتين كان كبيراً (  $n_1 + n_2 \geq 60$  ) فإننا نستخدم المختبر الإحصائي :

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

وهو أيضاً متغير عشوائي يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري بافتراض صحة الفرض العدمي ويجري الاختبار كما سبق في (أ) .

(جـ) إذا كانت  $\sigma_1^2$  ،  $\sigma_2^2$  مجهولتين وحجم العييتين صغيراً :

إذا كان حجم العييتين صغيراً فإن المختبر الإحصائي يعتمد على ما إذا كان فرضنا بأن  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

(١) بافتراض أن  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ( القيمتان المجهولتان متساويتان ) .

في هذه الحالة نحسب التباين التجميعي من العلاقة :

$$s_p^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$



$$\text{حيث } \bar{y}_1 = \frac{1}{n_1 - 1} \left\{ \text{مجم } y_1 - \frac{(\text{مجم } y_1)^2}{n_1} \right\}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{n_2 - 1} \left\{ \text{مجم } y_2 - \frac{(\text{مجم } y_2)^2}{n_2} \right\}$$

هما تقديراتنا لتباين المجتمعين كما سبق . والمختبر الاحصائي هو :

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \bar{y}_c}}$$

والمتغير العشوائي (ت) يتبع التوزيع (ت) بدرجات حرية  $(n_1 + n_2 - 2)$

- ٢ ) بافتراض صحة الفرض العلمي  $(\mu_1 = \mu_2)$  ونستخدم نفس الطرق السابقة في التحليل ولكن باستخدام توزيع (ت) بدلاً من التوزيع الطبيعي المعياري .

(٢) بافتراض أن  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  (القيمتان المجهولتان غير متساويتين) :

المختبر الإحصائي في هذه الحالة هو :

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\frac{\bar{y}_1}{n_1} + \frac{\bar{y}_2}{n_2}}}$$

وهو متغير عشوائي يتبع توزيعاً يقترب من توزيع (ت) بدرجة حرية

(ن) بافتراض صحة الفرض العلمي حيث :

$$n = \frac{\left[ \frac{\bar{y}_1}{n_1} + \frac{\bar{y}_2}{n_2} \right]}{\frac{\bar{y}_1^2}{n_1(n_1 + 1)} + \frac{\bar{y}_2^2}{n_2(n_2 + 1)}}$$

وقيمة ( ن ) المحسوبة تكون في العادة عدداً حقيقياً لذلك نأخذ أقرب رقم صحيح لها ليكون درجة الحرية للتوزيع (ت) ثم نستخدم نفس الطرق السابقة في التحليل .

ملاحظة هامة :

في جميع اختبارات الفروض الإحصائية المتعلقة بالقيمة المتوقعة لمجتمعين مستقلين افترضنا سهولة العرض أن الفرض العدمي هو  $(\mu_1 = \mu_2)$  بمعنى أن  $(\mu_1 - \mu_2 = \text{صفر})$  . ولكن يمكن تعميم الأسلوب السابق في التحليل إذا كان الفرض العدمي مثلاً في الصورة  $\mu_1 - \mu_2 = \text{ك}$  ( حيث ك مقدار ثابت) وفي هذه الحالة يصبح المختبر الإحصائي ( في حالة ما إذا كان تباين المجتمعين معلوماً على سبيل المثال ) هو :

$$Y = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \text{ك})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وهو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري أيضاً ومن ثم نستخدم نفس الأسلوب السابق في التحليل وبصورة عامة فلإننا افترضنا أن ك = صفرأ في جميع الحالات السابقة ، وهي الحالة الأكثر شيوعاً في كثير من التطبيقات .

مثال ( ١١ - ٨ ) :

للمقارنة بين نوعين من أنواع حليب الأطفال اخترنا عيتين من الأطفال الرضع حجم الأولى منهما ٣٥ طفلاً وحجم الثانية ٥٦ طفلاً واستخدم النوع الأول من الحليب في تغذية العينة الأولى لمدة ٤ شهور واستخدم النوع الثاني في تغذية العينة الثانية لنفس المدة الزمنية . فإذا وجد أن متوسط الزيادة في وزن أطفال المجموعة الأولى ٢,٥٦٠ كيلو جرام بينما متوسط

الزيادة في وزن أطفال المجموعة الثانية هو ٢,٧٩٥ كيلوجرام . فإذا علمت أن مقدار الزيادة يتوزع توزيعاً طبيعياً بتباين مقداره ٨٥٠ , للنوع الأول و٦٧٨ , للنوع الثاني . اختبر الفرض القائل بأنه ليس هناك فرق بين النوعين عند مستوى معنوية ٠,١ .

$$\text{الحل : } \bar{x}_1 = 35 , \bar{s}_1^2 = 2,060 , \bar{x}_2 = 2,795 , \bar{s}_2^2 = 0,678$$

الفرض العلمي :  $\mu_1 = \mu_2$

(اختبار الطرفين)

الفرض البديل :  $\mu_1 \neq \mu_2$

المختبر الإحصائي هو :

يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بافتراض  
صحة الفرض العلمي

$$\begin{aligned} &= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\bar{s}_1^2}{n_1} + \frac{\bar{s}_2^2}{n_2}}} \\ &= \frac{2,795 - 2,060}{\sqrt{\frac{0,678}{56} + \frac{0,850}{35}}} \\ &= \frac{-0,235}{\sqrt{0,0121 + 0,0243}} \\ &= -1,232 \end{aligned}$$



وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن قيمة (ى) التي تجعل مساحة منطقة الرفض (بطرفيها المتساويين) تساوي ٠,٠١ هي ٢,٥٧ .

وحيث أن قيمة (ى) المحسوبة تقع في منطقة القبول فإننا نقبل الفرض العدمي القائل بأنه لا يوجد فرق بين النوعين من الحليب على زيادة وزن الأطفال بدرجة ثقة ٩٩٪ .

مثال (١١ - ٩) :

أخذت عيتان من قاطني الشقق السكنية في دولتين مختلفتين لقياس مستوى أسعار إيجارات السكن وكانت النتائج كالتالي :

$$\begin{aligned} \text{ن} = 120 , \quad \bar{x} = 379,20 , \quad s^2 = 54 \text{ دولار} \\ \text{ن} = 195 , \quad \bar{x} = 321,43 , \quad s^2 = 62 \text{ دولار} \end{aligned}$$

فهل تدل هذه البيانات على أن هناك فرقاً حقيقياً بين مستوى الإيجار في البلدين عند مستوى معنوية ٠,٠٥ .

الحل :

بافتراض أن (١٢٠) هي متوسط الإيجار في البلد الأول، (١٩٥) هي متوسط الإيجار في البلد الثاني .

$$\text{الفرض العدمي} : \mu_1 = \mu_2$$

$$\text{الفرض البديل} : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (\text{اختبار الطرفين})$$

وحيث إن حجم العيتين كبيراً فإن المختبر الإحصائي هو :

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad \text{يتبع التوزيع الطبيعي المعياري}$$

بافتراض قيمة الفرض العدمي .

$$\begin{aligned}
& \frac{321,43 - 379,20}{\sqrt{\frac{2(62)}{190} + \frac{2(54)}{120}}} = \\
& \frac{57,77}{\sqrt{44,01}} = \\
& 8,71 =
\end{aligned}$$



وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن قيمة (ي) التي تحقق مستوى المعنوية 0.05 ، في اختبار الطرفين هي 1.96 .

وحيث أن قيمة (ي) المحسوبة أكبر من قيمة (ي) الجدولية أي تقع في منطقة الرفض ومن ثم نقبل الفرض البديل القائل بأن مستوى الأيجار مختلف بين البلدين بدرجة ثقة 95% .  
مثال ( ١١ - ١٠ ) :

في دراسة لقياس مستوى الذكاء بين طلاب جامعتي القاهرة والكويت أخذت عينة عشوائية حجمها ١٤ من طلبة جامعة الكويت فكان متوسط الذكاء ١١٠ والانحراف المعياري ٨ . وأخذت عينة عشوائية حجمها ١٦ من بين طلبة جامعة القاهرة فكان متوسط الذكاء ١٠٥ والانحراف المعياري ١٠ .

اختبر عند مستوى معنوية 0.05 ، ما إذا كان هناك فرق بين مستوى الذكاء بين طبعتي الجامعتين إذا علمت أن تباين المجتمعين متساويان .

الحل : ن = ١٤ ، م = ١١٠ ، ع = ٨

ن = ١٦ ، م = ١٠٥ ، ع = ١٠

وبافتراض أن م<sub>١</sub> هي مستوى الذكاء في جامعة الكويت

م<sub>٢</sub> هي مستوى الذكاء في جامعة القاهرة .

( تساوي مستوى الذكاء )

الفرض العدمي : م<sub>١</sub> = م<sub>٢</sub>

( اختبار الطرفين )

الفرض البديل : م<sub>١</sub> ≠ م<sub>٢</sub>

وحيث أن حجم العييتين صغير فلن المختبر الإحصائي هو :

$$t = \frac{\bar{m}_1 - \bar{m}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \sigma_c^2}}$$

يتبع التوزيع (ت) بدرجات حرية (ن<sub>١</sub> + ن<sub>٢</sub> - ٢) بافتراض صحة

الفرض العدمي .

وحيث إن تباين المجتمعين متساويان فإنه يمكن تقدير التباين

التجميعي من العلاقة .

$$\sigma_c^2 = \frac{\bar{m}_1^2(1 - \frac{n_1}{N}) + \bar{m}_2^2(1 - \frac{n_2}{N})}{2 - \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N}}$$

$$= \frac{100 \times 10 + 16 \times 83}{28} = 83,286$$

$$\therefore t = \frac{110 - 105}{\sqrt{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{14}\right) 83,286}}$$

$$= \frac{5}{3,2398} = 1,497$$



وباستخدام توزيع (ت) عند مستوى المعنوية 0.05 ، ودرجات حرية 28  
فإن منطقة القبول هي  $(-2,048, 2,048)$  .

وحيث إن القيمة المحسوبة تقع داخل منطقة القبول أي أننا نقبل  
الفرض العدمي القائل بأنه ليس هناك فرق جوهري بين مستوى الذكاء بين  
طلبتي الجامعتين بدرجة ثقة 95٪ .

مثال ( ١١ - ١١ ) :

من بيانات المثال السابق اختبر ما إذا كان هناك فرق بين مستوى  
الذكاء بين طلبيتي الجامعتين إذا علمت أن تباين المجتمعين غير متساويين .

الحل :

في هذه الحالة فإن المختبر الإحصائي هو :

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{110 - 105}{\sqrt{\frac{64}{14} + \frac{100}{16}}} = 1,52 = \frac{0}{3,289}$$

والمختبر الإحصائي هو متغير يقترب من التوزيع (ت) بـ درجات حرية

(ن) حيث :

$$2 - \frac{2\left(\frac{100}{16} + \frac{64}{14}\right)}{\frac{2(100)}{17 \times 256} + \frac{2(64)}{15 \times 96}} = n$$

$$29,73 = 2 - 31,73 = 2 - \frac{117,1033}{3,69} =$$

∴  $n = 30$  إلى أقرب رقم صحيح .

وباستخدام توزيع (ت) عند مستوى المعنوية ٠٥ ، ودرجات حرية ٣٠ نجد أن منطقة القبول هي ( - ٢,٠٤ ، ٢,٠٤ ) .

وحيث إن القيمة المحسوبة ( ١,٥٢ ) تقع داخل منطقة القبول ومن ثم فليس هناك فرق جوهري بين مستوى الذكاء في المجتمعين بدرجة ثقة ٩٥ % .

(٣) اختبارات الفروض الإحصائية لنسبة ظاهرة ما في المجتمع :

سبق أن أشرنا إلى نسبة المفردات التي تحمل صيغة معينة في مجتمع ما بالنسبة (ح) وأن (خ) هي التقدير الجيد للنسبة (ح) باستخدام بيانات عينة عشوائية من المجتمع موضع الدراسة . أيضاً سبق أن ذكرنا أن المتغير العشوائي (خ) يتبع توزيعاً احتمالياً متقطعاً يعرف بتوزيع ذو الحدين Binomial Distribution . وإذا كان حجم العينة (ن) كبيراً فإنه يمكن تقريبه بالتوزيع الطبيعي بتوقع (ح) وتباين  $\frac{ح(١-ح)}{ن}$  ومن ثم يمكن استخدام المختبر الإحصائي .

$$U = \frac{\hat{ح} - ح}{\sqrt{\frac{ح(١-ح)}{ن}}}$$



وهو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري ومن ثم يمكن استخدامه في اختبار الفروض الإحصائية حول نسبة الحدوث في المجتمع كما سبق .

مثال ( ١١ - ١٢ ) :

إذا كانت نسبة الافراد الذين يقل أعمارهم عن ٢٥ سنة في إحدى المدن هي ٣٠٪ وأخذت عينة من ٢٠٠ فرد من هذه المدينة فوجد أن بينهم ٦٨ فرداً أعمارهم تقل عن ٢٥ سنة ، فهل تستنتج أن هذه العينة لا تمثل المدينة من حيث تمثيل فئة العمر الأقل من ٢٥ سنة وذلك عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ .

الحل :

$$n = 200 , \quad c = 30 , \quad \hat{c} = \frac{68}{200} = 34\%$$

(العينة تمثل المدينة)

الفرض العدمي :  $c = 30$

( اختبار الطرفين )

الفرض البديل :  $c \neq 30$

والمختبر الإحصائي هو :

$$Z = \frac{\hat{c} - c}{\sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}} \quad \text{يتبع التوزيع الطبيعي المعياري}$$

$$= \frac{34 - 30}{\sqrt{\frac{30 \times 70}{200}}}$$

$$= \frac{4}{3.22} = 1.23$$

وعند مستوى المعنوية ٠٥ ، ويستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري كما سبق نجد أن منطقة القبول هي ( - ١,٩٦ ، ١,٩٦ ) .  
 وحيث أن القيمة المحسوبة تقع داخل منطقة القبول فإننا نقبل الفرض العدمي القائل بأنه ليس هناك فرق جوهري بين النسبة في العينة والنسبة في المجتمع بدرجة ثقة ٩٥٪ .

مثال ( ١١ - ١٣ ) :

ادعت نقابة عمالية بأن ٤٠٪ على الأقل من مهندسي السكك الحديدية استبدلت مهنتها المعنية فيها بمهنة أخرى خلال أربع السنوات الأخيرة . ولدراسة هذا الادعاء أخذت عينة من ١٢٨ مفردة أظهرت أن ٣٢ مهندساً استبدلوا مهنتهم خلال أربع السنوات الأخيرة . اختبر هذا الادعاء عند مستوى المعنوية ٠١ .

الحل :

$$ح = ٤٠ ، ن = ١٢٨ ، ح' = \frac{٣٢}{١٢٨} = ٢٥$$

الفرض العدمي : ح = ٤٠ ،

الفرض البديل : ح > ٤٠ ، ( اختبار الطرف الأيسر )

والمختبر الإحصائي هو :

$$Z = \frac{\hat{C} - C}{\sqrt{\frac{C(1-C)}{n}}} = \frac{٢٥ - ٤٠}{\sqrt{\frac{٤٠ \times ٦٠}{١٢٨}}} = \frac{-١٥}{\sqrt{١٨,٦٩}} = \frac{-١٥}{٤,٣٣} = -٣,٤٦٤$$



وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري عند مستوى المعنوية ٠,٠١ نجد أن قيمة (ى) التي تحقق اختبار الطرف الأيسر هي ( - ٢,٣٢ ) وحيث إن القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية ( تقع في منطقة الرفض ) فإننا نرفض الادعاء القائل بأن ٤٠٪ من مهندسي السكك الحديدية استبدلوا مهنتهم خلال أربع السنوات الأخيرة بدرجة ثقة ٩٩٪ .

(٤) اختبارات الفروض لتساوي نسبة الحدوث لمجمعتين مختلفتين :

إذا أردنا مقارنة نسبة الحدوث لمجمعتين مختلفتين (ح١ ، ح٢) وسحبنا عييتين عشوائيتين من المجمعتين وحصلنا على النتائج التالية :

العيينة الأولى	العيينة الثانية	
ن <sub>١</sub>	ن <sub>٢</sub>	حجم العينة
خ <sub>١</sub>	خ <sub>٢</sub>	نسبة الحدوث
$\frac{خ_1(1-خ_1)}{ن_1}$	$\frac{خ_2(1-خ_2)}{ن_2}$	التباين

وبافتراض صحة الفرض العدمي والقائل بأنه لا يوجد فرق بين نسبي حدوث الظاهرة في المجمعتين (ح١ = ح٢ = ح) فإن الفرق بين تقديري نسبة الحدوث يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري بتوقع (ح١ - ح٢) = صفر وتباين يمكن تقديره من العلاقة :

$$\text{تباين } (x - \bar{x})^2 = \text{تباين } x + \text{تباين } \bar{x} :$$

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{n} =$$

$$= \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) (x - \bar{x})^2$$

وذلك بفرض صحة الفرض العدمي ( $H_0 = H_1$ ) .

وحيث إن ( $H_0$ ) غير معلومة فيمكن تقديرها باستخدام بيانات العيتين على النحو التالي :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

وبالتالي فإن :

$$\text{تباين } (x - \bar{x})^2 = \frac{(x - \bar{x})^2 (n_1 + n_2)}{n_1 n_2}$$

والمختبر الاحصائي في هذه الحالة :

$$Y = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(x - \bar{x})^2 (n_1 + n_2)}{n_1 n_2}}}$$

يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بفرض صحة الفرض العدمي ثم نستخدم الطرق السابقة باستخدام هذا المختبر في اختبارات الفروض المتعلقة بالفرق بين نسبتي .

مثال ( ١١ - ١٤ ) :

أجرى استفتاء على موضوع ما في مجتمعين فأخذت عينة عشوائية من المجتمع الأول فكان عدد الذين وافقوا على ذلك الموضوع هو ٢٤٣ من بين ٣٠٠ شخص ، وفي عينة عشوائية أخرى سحبت من المجتمع الثاني

وجد أن عدد الذين وافقوا على ذلك الموضوع هو ١٦٤ من بين ٢٠٠ شخص . فهل يدل ذلك على وجود فرق جوهري بين درجة قبول ذلك الموضوع في المجتمعين عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ .

الحل :

$$n_1 = 300 , \hat{X}_1 = \frac{243}{300} = ,81$$

$$n_2 = 200 , \hat{X}_2 = \frac{164}{200} = ,82$$

$$\hat{X} = \frac{n_1 \hat{X}_1 + n_2 \hat{X}_2}{n_1 + n_2} = \frac{,81 \times 300 + ,82 \times 200}{300 + 200}$$

$$= \frac{243 + 164}{500} = \frac{407}{500} = ,814$$

بافتراض أن (ح<sub>١</sub> ، ح<sub>٢</sub>) هي نسب الموافقين على الموضوع في المجتمعين على الترتيب .

الفرض العدمي : ح<sub>١</sub> = ح<sub>٢</sub>

الفرض البديل : ح<sub>١</sub> ≠ ح<sub>٢</sub> ( اختبار الطرفين )

وبافتراض صحة الفرض العدمي فإن المختبر الإحصائي :

$$Y = \frac{\hat{X}_1 - \hat{X}_2}{\sqrt{\frac{\hat{X}(1-\hat{X})(n_1 + n_2)}{n_1 n_2}}} \text{ يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري .}$$

$$= \frac{,81 - ,82}{\sqrt{\frac{,814 \times (1 - ,814) \times (300 + 200)}{300 \times 200}}} = - ,28$$

وعند مستوى المعنوية ٠٥ ، وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري كما سبق نجد أن منطقة القبول هي ( - ١,٩٦ ، ١,٩٦ ) .  
وحيث إن القيمة المحسوبة تقع داخل منطقة القبول فليس هناك ما يبرر رفض الفرض العلمي ، أي أنه لا يوجد فرق بين درجة قبول ذلك الموضوع في المجتمعين عند مستوى المعنوية ٠٥ .

(٥) اختبارات الفروض الاحصائية لتباين المجتمع :

لاختبار الفروض الإحصائية المتعلقة بتباين مجتمع دراسة (  $\chi^2$  ) على أساس القيمة المقدرة لهذا التباين والمحسوبة من عينة عشوائية مأخوذة من هذا المجتمع باستخدام العلاقة :

$$\chi^2 = \frac{1}{1-n} \left\{ \text{مجم س}^2 - \frac{(\text{مجم س})^2}{n} \right\}$$

يستخدم المختبر الإحصائي :

$$\chi^2_{\alpha} = \frac{\chi^2 (1-n)}{\chi^2_{\sigma}}$$

$$= \frac{\text{مجم س}^2 - \frac{(\text{مجم س})^2}{n}}{\chi^2_{\sigma}}$$

وهو متغير عشوائي يتبع توزيع مربع كاي Chi-Square بـدرجات حرية ( ١ - ن ) وذلك إذا كان المتغير (س) موزعاً توزيعاً طبيعياً ، ويقترب من توزيع مربع كاي إذا كانت (س) موزعة غير ذلك بشرط أن يكون حجم العينة كبيراً . ثم نستخدم نفس الخطوات السابقة لاختبار الفروض المتعلقة بتباين المجتمع مع ملاحظة أن توزيع مربع كاي غير متماثل لذلك فإن ما ينطبق على الجهة اليمنى لا ينطبق على الجهة اليسرى وكذلك عند استخدام

اختبار الطرفين نقسم منطقة الرفض إلى قسمين متساويين في المساحة ( كل جزء يساوي مستوى المعنوية مقسوماً على ٢ ) غير أن حدود كل منطقة يحدد من الجدول كل على حدة .

مثال ( ١١ - ١٥ ) :

في عينة من ٢٥ مفردة كان الانحراف المعياري ٥,١ وبفرض أن المجتمع موزع توزيعاً طبيعياً اختبر الفرض القائل بأن الانحراف المعياري للمجتمع هو ٧ ضد الفرض القائل بأنه أكبر من ذلك عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ .

الحل :

$$n = 25 , \quad \sigma = 5,1 , \quad \sigma = 7$$

الفرض العدمي :  $\sigma^2 = 49$

الفرض البديل :  $\sigma^2 < 49$

( اختبار الطرف الأيمن )

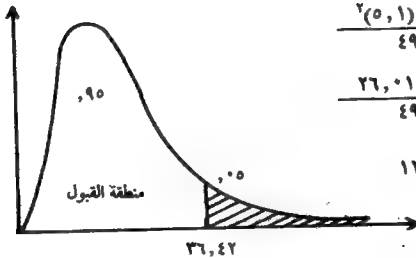
المختبر الاحصائي هو :

$$\frac{\chi^2 (1 - \alpha)}{\sigma^2} = \chi^2_{\alpha}$$

$$\frac{\chi^2 (0,1) \times 24}{49} =$$

$$\frac{26,01 \times 24}{49} =$$

$$12,7396 =$$



وعند مستوى المعنوية ٠,٠٥ , وباستخدام جدول توزيع مربع كاي بدرجات حرية ٢٤ نجد أن منطقة الرفض تبدأ من ٣٦,٤٢ . وحيث إن القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية فإننا نقبل الفرض العلمي القائل بأن تباين المجتمع يساوي ٤٩ ( الانحراف المعياري يساوي ٧ ) بدرجة ثقة ٩٥ % .

مثال ( ١١ - ١٦ ) :

استخدم بيانات المثال السابق في اختبار الفرض القائل بأن تباين المجتمع هو ٤٩ ضد الفرض القائل بأنه لا يساوي ٤٩ عند مستوى المعنوية ٠,٠١ .

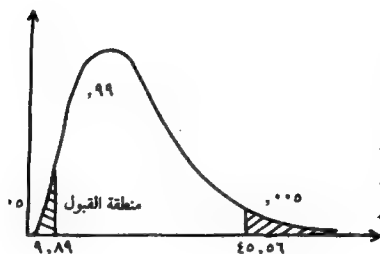
الحل :

الفرض العدمي :  $\sigma^2 = 49$

الفرض البديل :  $\sigma^2 \neq 49$  ( اختبار الطرفين )

والمختبر الاحصائي هو  $\chi^2_{0.005} = 12,7396$

ولتحديد منطقة الرفض في هذه الحالة نجد أن لدينا منطقتين حجم كل منهما يساوي ٠,٠٠٥ , وللكشف عن حدود منطقة الرفض يجب الكشف عن حدود كل منطقة على حدة باستخدام جدول توزيع كاي<sup>٢</sup> بدرجة





حرية ٢٤ ، حيث نجد أن حدود المنطقة التي على اليمين المقابلة للمساحة ٠٠٥ ، هي ٤٥,٥٦ ، بينما نجد أن حدود المنطقة التي على اليسار والمقابلة للمساحة ٩٩٥ ، هي ٩,٨٩ .

وحيث إن القيمة المحسوبة تقع في منطقة القبول لذلك فإننا نقبل الفرض العدمي القائل بأن القيمة الحقيقية لتباين المجتمع هي ٤٩ بدرجة ثقة ٩٩٪ .

(٦) اختبارات الفروض المتعلقة بتباين مجتمعين مختلفين :

لإجراء اختبار عما إذا كان هناك فرق جوهري بين تباين مجتمعين مختلفين  $\sigma_1^2$  ،  $\sigma_2^2$  على الترتيب ، نقوم بسحب عيتين الأولى حجمها (ن<sub>١</sub>) من المجتمع الأول والثانية حجمها (ن<sub>٢</sub>) من المجتمع الثاني ثم نقدر تباين المجتمعين (ع<sub>١</sub><sup>٢</sup> ، ع<sub>٢</sub><sup>٢</sup>) على الترتيب باستخدام بيانات العيتين كما سبق .

والمختبر الإحصائي المستخدم هو :

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \quad (ع_1^2 < ع_2^2)$$

يتبع توزيع (ف) بدرجات حرية (ن<sub>١</sub> - ١) ، (ن<sub>٢</sub> - ١) عند مستوى المعنوية المحدد ويطلق عليه اسم اختبار التجانس . ونظراً لطبيعة جدول توزيع (ف) يجري هذا الاختبار على النحو التالي : -

١ - إذا كانت القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية قبل الفرض العدمي .

٢ - إذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية نرفض الفرض العدمي .

## ملاحظة :

إذا كان  $\sigma^2 < \sigma_0^2$  نستخدم المختبر الاحصائي

$$F = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}$$

وهو يتبع توزيع (ف) بـ درجات حرية  $(n_1 - 1)$  ،  $(n_2 - 1)$  .

مثال ( ١١ - ١٧ ) :

بافتراض أن لدينا عيتين عشوائيتين الأولى حجمها ٩ مفردات وتباينها ٢٤ والثانية حجمها ١٥ مفردة وتباينها ١١ . اختبر الفرض القائل بتساوي تباين المجتمعين اللذين سحبت منهما العينتان عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ .

الحل :

$$n_1 = 9 , \quad \sigma^2 = 24$$

$$n_2 = 15 , \quad \sigma^2 = 11$$

وبفرض أن  $\sigma^2 = \sigma_0^2$  ، تشيران إلى تباين المجتمعين الأول والثاني على الترتيب .

( هناك تجانس بين المجتمعين )

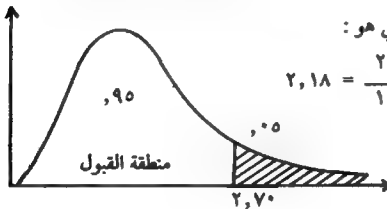
الفرض العدمي :  $\sigma^2 = \sigma_0^2$

( لا يوجد تجانس بين المجتمعين )

الفرض البديل :  $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

والمختبر الإحصائي هو :

$$F = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{24}{11} = 2,18$$



وباستخدام جدول (ف) عند مستوى المعنوية ٠٥ ، ودرجات الحرية ٨ ، ١٤ نجد أن  $F(٨, ١٤, ٠٥) = ٢,٧٠$  وحيث ان القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية ( تقع في منطقة القبول ) لذلك فإننا نقبل الفرض العددي القائل بتساوي تباين المجتمعين ( هناك تجانس بين المجتمعين ) بدرجة ثقة ٩٥٪ .

### تمارين محلولة

١ - فيما يلي بيان بتوزيع ١٠٠ طالب حسب الدرجات التي حصلوا عليها في امتحان مادة الإحصاء .

فئات الدرجات	صفر - ٦	- ١٠	- ١٤	- ١٨ - ٢٠
عدد الطلبة	٢٠	٢٥	٣٠	١٨

احسب نسبة الحاصلين على ١٤ درجة فأكثر ثم قدر هذه النسبة لمجتمع الطلبة بثقة ٩٩٪ .

الحل :

$$\text{نسبة الطلبة الحاصلين على ١٤ فأكثر} = \text{ح} = \frac{٢٥}{١٠٠} = ٠,٢٥$$

وبثقة ٩٩٪ وباستخدام هذه النسبة فيمكننا تقدير هذه النسبة للمجتمع ككل باستخدام العلاقة :

$$\begin{aligned} \text{ح} \pm ٢,٥٨ \sqrt{\frac{\text{ح} (١ - \text{ح})}{\text{ن}}} \\ ٠,٢٥ \pm ٢,٥٨ \sqrt{\frac{٠,٢٥ \times ٠,٧٥}{١٠٠}} \\ ٠,٢٥ \pm ١,١ \end{aligned}$$

∴ نسبة الحاصلين على ١٤ درجة فأكثر لكل الطلبة تتراوح بين ( ١٤ ، ، ٣٦ ، ) بثقة ٩٩٪ .

٢ - البيانات التالية تعطي متوسط انتاجية العامل والانحراف المعياري في عيتين حجم كل منها ٥٠ مفردة من العمال الذكور ومن العاملات الإناث وذلك في دراسة لإحدى عمليات الإنتاج .

عينة الذكور	عينة الاناث
$\bar{x}_1 = ٨٥$	$\bar{x}_2 = ٩٦$
$s_1^2 = ٦$	$s_2^2 = ٨$
$n_1 = ٥٠$	$n_2 = ٥٠$

هل ترى من نتائج هذه الدراسة وجود فرق معنوي بين إنتاجية العامل وإنتاجية العاملة في هذه العملية الإنتاجية ؟

الحل :

بافتراض أن ( ١١٤ ، ١١٤ ) هي متوسط الانتاجية في مجتمع العمال والعاملات على الترتيب :

الفرض العدمي :  $\mu_1 = \mu_2$

الفرض البديل :  $\mu_1 \neq \mu_2$  ( اختبار الطرفين )

وحيث إن حجم العيتين كبير فإن المتغير العشوائي :

$$Y = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بافتراض صحة الفرض العدمي .

$$\frac{11 -}{1,414} = \frac{11 -}{2\sqrt{}} = \frac{96 - 85}{\frac{64}{50} + \frac{36}{50}\sqrt{}} = \text{ى}$$

$$\text{ى} = -7,779$$

وعند مستوى المعنوية ٠٥ , نعلم أن منطقة القبول هي ( -١,٩٦ , ١,٩٦ ) وعليه فإن القيمة المحسوبة تقع في منطقة الرفض .

وبعبارة أخرى فإنه يوجد فرق جوهري بين إنتاجية العامل وإنتاجية العاملة في هذه العملية الانتاجية .

٣ - أجريت استبانة إحصائية على مجموعة من النساء والرجال فكان عدد المتعاونين المستجيبين للاستبانة من الفتيين على النحو التالي :

عدد المتعاونين مع الاستبيان	حجم العينة	
١١٠	٢٠٠	رجال
٢١٠	٣٠٠	نساء

اختبر الفرض الإحصائي بأن معدل الاستجابة واحد للجنسين عند مستوى المعنوية ٠٥ .

الحل :

$$\text{نسبة المستجيبين من الرجال} = \hat{p}_1 = \frac{110}{200} = 0,55$$

$$\text{نسبة المستجيبين من النساء} = \hat{p}_2 = \frac{210}{300} = 0,70$$

وبفرض أن ح١ ، ح٢ هي نسب المستجيبين في مجتمع الرجال والنساء على الترتيب .

الفرض العلمي :  $١ح = ٢ح$

( اختبار الطرفين )

الفرض البديل :  $١ح \neq ٢ح$

المختبر الاحصائي هو :

$$١\bar{X} - ٢\bar{X} = \frac{\sqrt{\frac{١ن(١ح - ١) + ٢ن(٢ح - ٢)}{١ن + ٢ن}}}{١ن + ٢ن}$$

يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بافتراض صحة الفرض العلمي  
حيث :

$$\frac{١\bar{X} - ٢\bar{X}}{\sqrt{\frac{١ن(١ح - ١) + ٢ن(٢ح - ٢)}{١ن + ٢ن}}} = \text{ح}$$

$$٠,٦٤ = \frac{٢١٠ + ١١٠}{٥٠٠} = \frac{٠,٧٠ \times ٣٠٠ + ٠,٥٥ \times ٢٠٠}{٣٠٠ + ٢٠٠} =$$

لذلك فإن :

$$٣,٤٢ = \frac{٠,١٥ - ٠,٥٥}{\sqrt{\frac{٠,٧٠ \times ٣٠٠ + ٠,٦٤ \times ٢٠٠}{٥٠٠ \times ٣,٦٦ \times ٠,٦٤}}} = \text{ح}$$

وعند مستوى المعنوية ٠,٠٥ نجد أن منطقة القبول هي ( - ١,٩٦ ، ١,٩٦ ) .  
وحيث إن القيمة المحسوبة لا تقع في منطقة القبول لذلك فإننا نرفض الفرض العلمي القائل بأن نسبة الاستجابة للاستبانة متساوية بين الرجال والنساء بدرجة ثقة ٩٥٪ .

٤ - مصنع ما لمواد كيميائية ينتج نوعاً من المركبات الكيميائية بمتوسط ٨٨٠ طن يومياً وانحراف معياري ٢١ طن يومياً .  
لاختبار مدى تحقيق هذا المصنع للإنتاجية المطلوبة أخذت عينة من إنتاج ٥٠ يوماً فكان

متوسطها ٨٧١ طن في اليوم الواحد . اختبر ما إذا كان المصنع يحقق الهدف المرسوم له إنتاجياً عند مستوى المعنوية ٠,٠١ .

الحل :

$$٥٠ = \bar{x} , ٨٧١ = \mu , ٨٨٠ = \sigma , ٢١ = n$$

الفرض العدمي :  $\mu = ٨٨٠$

الفرض البديل :  $\mu \neq ٨٨٠$  ( اختبار الطرفين )

والمختبر الاحصائي هو :

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ يتبع التوزيع الطبيعي المعياري}$$

$$-3,03 = \frac{9 - 9}{2,97} = \frac{٨٨٠ - ٨٧١}{٥٠ \sqrt{21}} =$$

وعند مستوى المعنوية ٠,٠١ نجد أن منطقة القبول هي ( -٢,٥٧ ، ٢,٥٧ ) . وحيث أن القيمة المحسوبة لا تقع في حدود منطقة القبول فإننا نرفض الفرض العدمي القائل بأن متوسط الإنتاج اليومي يعادل ٨٨٠ طن بدرجة ثقة ٩٩٪ .

٥ - أراد أحد المصانع أن يختبر طريقة أخرى لتدريب عماله ، فلماذا أخذت عيتمان من العمال المتدربين على الطريقة القديمة ( الطريقة رقم ١ ) والعمال المتدربين على الطريقة الجديدة ( الطريقة رقم ٢ ) فلماذا كانت  $n_1 = ٩$  ،  $n_2 = ١٥$  وإذا كان متوسط الوقت الذي يأخذه العامل المتدرب على الطريقة الأولى هو ٣٥,٢٢ دقيقة لتركيب جهاز معين ، ومتوسط الوقت للعامل من المجموعة الثانية لتركيب نفس الجهاز هو ٣٧,٥٦ دقيقة ، وكانت  $E_1 = ٢٤,٤٤٥$  ،  $E_2 = ١١,٤٤٤$  . اختبر

ما إذا كانت الطريقة الجديدة أفضل من الطريقة القديمة عند مستوى المعنوية ٠,٥ , إذا علمت أن  $\sigma_1 = \sigma_2$  .

الحل :

$$n_1 = 9 , \bar{x}_1 = 35,22 , s_1^2 = 24,445$$

$$n_2 = 15 , \bar{x}_2 = 37,56 , s_2^2 = 11,444$$

$$\text{وحيث أن } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

لذلك فإن  $\sigma$  تقدر باستخدام العلاقة :

$$\bar{s}^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{24,445 \times 8 + 11,444 \times 14}{9 + 15 - 2}$$

$$= \frac{355,776}{22} = 16,17$$

الفرض العدمي :  $\mu_1 = \mu_2$

( اختبار الطرف الأيسر )

الفرض البديل :  $\mu_1 > \mu_2$

المختبر الإحصائي هو :

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \bar{s}^2}}$$

يتبع توزيع (ت) بدرجات حرية  $(n_1 + n_2 - 2)$  بافتراض صحة

الفرض العدمي ..

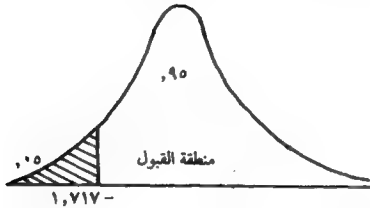


$$= \frac{37,56 - 35,22}{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9}\right) 16,17 \sqrt{}} =$$

$$= \frac{2,34 -}{1,695} = 1,38$$

وعند مستوى المعنوية ٠,٥ , ويستخدم جدول توزيع (ت) بدرجات حرية ٢٢ نجد أن الحد الأعلى لمنطقة الرفض = -١,٧١٧ .

وحيث أن القيمة المحسوبة تقع في منطقة القبول فإننا نقبل الفرض العدمي القائل بأنه لا يوجد فرق بين الأسلوبين بدرجة ثقة ٩٥٪ .



## تعارين الفصل الحادي عشر

(١) إذا كان متوسط سعر الصرف بين الدينار الكويتي والدولار الأمريكي هو ٠,٢٩٣٥ فلساً لكل دولار ويانحرف معياري قدره ٠,٠٥٩ , وللتأكد من ذلك أخذت عينة لسعر الصرف من ٤٥ مؤسسة مصرفية فكان متوسط السعر هو ٠,٢٩٣٩٩ فلساً . فهل يدل ذلك على اختلاف سعر الدولار عند مستوى المعنوية ٣,٠٥ .

(٢) خلال النقاش على عقد جديد بين شركة مواد بناء وعمالها ادعى ممثل نقابة العمال بأن متوسط أجر العامل في اليوم في باقي الشركات أعلى منه في الشركة ويبلغ ٤,٥٠٠ دينار . وللتأكد من ذلك أخذت عينة من ٤٩ عاملاً من الشركات الأخرى فكان متوسط أجرها اليومي ٤,٦٥٠ دينار . اختبر هذا الادعاء عند مستوى المعنوية ٠,٠١ , إذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع هو ٥٦٠ .

(٣) في محاولة لاستطلاع رأي الجماهير في أحد مشروعات القوانين أخذت عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ فرد وافق منهم ٩٠ فرداً على المشروع وعارضه ١٠ أفراد فماذا نستنتج عن نسبة تقبل المجتمع الذي سحبت منه العينة ، وإذا كان عدد سكان المجتمع الذين لهم حق التصويت حول هذا القانون ٢٠٠٠٠ شخص فقدر عدد الموافقين على المشروع بثقة ٩٩٪ .

(٤) إذا كان متوسط غلة محصول معين هو ٧٥ كجم لكل فدان واستخدم نوع جديد من السماد في تجربة لزراعته في ٢٠ قطعة أرض فوجد أن متوسط الغلة هو ٨٠ كجم لكل فدان بانحراف معياري ٦ ، هل تستتج من ذلك أن لنوع السماد أثراً على كمية الإنتاج من المحصول عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ؟ .

(٥) سحبت عيتان مستقلتان من مجتمع ما وكانت نتائج الدراسة ما يلي :

العينة الأولى	العينة الثانية
$\bar{S}_1 = 30$	$\bar{S}_2 = 35$
$\sigma_1 = 2$	$\sigma_2 = 2,5$
$n_1 = 40$	$n_2 = 60$

اختبر الفرض الإحصائي بعدم وجود فرق جوهري بين المتوسطين بمستوى معنوية ٠,٠١ .

(٦) في عينة من ٤٠٠ شخص من سكان إحدى الدول وجد ١٥٠ شخصاً في الفئة العمرية ( أقل من ٢٠ سنة ) فهل تدل هذه البيانات على صحة الفرض القائل بأن نسبة السكان الذين يقل عمرهم عن ٢٠ سنة في هذه الدولة = ٣٥ ، عند مستوى المعنوية ٠,٠١ .

(٧) وجد أن متوسط الدخل السنوي للأسرة في عينة حجمها ٩٠٠ أسرة من منطقة ( أ ) هو ٢٤٠٠ دينار والانحراف المعياري في هذه العينة ٢٠ ديناراً كما وجد أن متوسط الدخل السنوي للأسرة في عينة حجمها ١٦٠٠ أسرة من منطقة أخرى (ب) هو ٣٦٠٠ دينار والانحراف المعياري ٢٢ ديناراً فهل يعتبر الفرق بين متوسطي الدخل في العيتين

يعكس اختلافاً جوهرياً بين مستوى الدخل في المنطقتين عند مستوى المعنوية ٠,٥ .

(٨) سلسلة تلفزيونية يجب أن تثبت أنها تتمتع بمشاهدة ٢٥٪ من مشاهدي التلفزيون خلال أسابيع عرضها الـ ١٣ الأولى لكي تكون سلسلة ناجحة . أخذت عينة من مشاهدي التلفزيون حجمها ٤٠٠ مشاهد ومشاهدة منها ٢٣٠ مشاهدة فوجد أن عدد المشاهدات لهذه المسلسلة هو ٦٥ ، وعدد المشاهدين ٤٣ . والمطلوب اختبار ما يلي :

أ - هل يمكن اعتبار المسلسل ناجحاً أم لا عند مستوى معنوية ٠,٥ .

ب - هل أن نسبة المشاهدين من الرجال ومن النساء واحدة لهذا المسلسل عند مستوى معنوية ٠,١ .

(٩) لاختبار ما إذا كان هناك فرق بين دخل الرجال والنساء لنفس الوظيفة في الإدارات العليا للشركات الخاصة أخذت عييتان من الرجال والنساء في نفس المستوى الوظيفي فكانت دخولهم الشهرية بالدينار كما يلي :

الرجال (المجموعة رقم ١)	النساء (المجموعة رقم ٢)
٧٥٠	٥٥٠
٦٩٥	٥٩٠
٨٩٥	٥٩٥
٦١٩	٧١٥
٧١٥	٦٣٥
٧٦٥	٦٩٥
٨١٠	
٦٩٥	
٧٦٩	
٧٦٠	

تحقق من ادعاء النقابات النسائية بمظلومية المرأة في الدخل لنفس الوظيفة عند مستوى المعنوية ٠,٠١ , إذا علمت أن :

$$١ - ٧٥ = ١٥٠ , ٧٥ = ٩٠$$

ب - ٧٥ , ٧٥ غير معلومين ولكنهما متساويان .

ج - ٧٥ , ٧٥ غير معلومين ولكنهما غير متساويين .

(١٠) أثبت التجارب السابقة أن آلة ما تنتج سلعة معينة لها طول ٢٥ سم وللتأكد من أن الآلة لا زالت تنتج عند المستوى المقبول أدخلت عينة من ٢٦ وحدة من إنتاج هذه الآلة فوجد أن طول هذه الوحدات في المتوسط هو ٢٥,٠٩ وانحرافها المعياري هو ٠,٠٤١ , اختبر مدى صلاحية الآلة للإنتاج عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ .

(١١) سحبت عينة من إنتاج مصنع لإنتاج معلبات غذائية فكانت الأوزان الصافية للمواد المعلبة كما يلي :

١٦٩ ، ١٦٥ ، ١٦٨ ، ١٧٠ ، ١٧٥ ، ١٧٤

والمطلوب :

أ - تقدير متوسط الوزن الصافي للإنتاج في المصنع بدرجة ثقة ٩٥٪ .

ب - هل يمكن القبول بمستوى معنوية ٠١ ، أن هذه العينة مأخوذة من مجتمع تباينه ٩١٠ .

ج - هل يمكن أن نقول بمستوى معنوية ٠٥ ، أن هذه العينة مأخوذة من مجتمع انحرافه المعياري ٣ ضد الفرض القائل بأنه أقل من ذلك ؟ .

## الفصل الثاني عشر

### استخدام البرامج الإحصائية الجاهزة في تحليل البيانات

نظراً لصعوبة التعامل مع البيانات الإحصائية وحساب المقاييس المختلفة منها فعادة ما نلجأ إلى استخدام الحاسبات الآلية . وتتوفر حالياً العديد من البرامج الإحصائية التي تقوم بهذا الدور ، منها ما هو متوفر على الحاسبات الشخصية الصغيرة . من أهم هذه البرامج وأكثرها شهرة على المستوى العالمي : برنامج SAS الإحصائي وبرنامج SPSS وبرنامج BMDP والتي عرفت خلال استخداماتها على الحاسبات الكبيرة ويتوفر منها الآن نسخ معدة للاستخدام على الحاسبات الشخصية وهي المعروفة بالأسماء : SAS-PC ، SPSS-PC + ، BMDP-PC . كما أنه على مستوى الحاسبات الصغيرة «Micro-Computers» تتوفر العديد من البرامج الإحصائية المتكاملة ويصعب حصر هذه البرامج ومنها على سبيل المثال :

برنامج Microstat ، وبرنامج Statpro ، وبرنامج Statgraph ، وبرنامج Statplan ، وبرنامج Statpak ، والعديد من البرامج الإحصائية المشابهة .

وسوف نعرض في هذا الفصل اثنين من هذه البرامج : برنامج ميكروستات Microstat كمشال للبرامج الإحصائية المتكاملة التي يمكن استخدامها على الحاسبات الشخصية وبرنامج SPSS كمشال على البرامج المستخدمة على الحاسبات الكبيرة والصغيرة معاً ، مستخدمين بعض الأمثلة الواردة في الكتاب .

## أولاً : استخدام برنامج ميكروستات في إدخال وتعديل وتحليل البيانات الإحصائية

### ١ - ادخال وتعديل البيانات :

برنامج Microstat<sup>(\*)</sup> ميكروستات هو أحد البرامج الإحصائية الجيدة التي تعمل على الحاسبات الآلية الشخصية . يمتاز هذا البرنامج بسهولة استخدامه حيث إنه يعتمد في تشغيله على أوامر اختيارية من مجموعة من الأوامر التي تظهر على شاشة الجهاز Menus ولاختيار الأمر المناسب لتنفيذ العملية الإحصائية المطلوبة يختار المستخدم لهذا البرنامج العملية عن طريق الضغط على الحرف المقابل لهذه العملية على الشاشة التي تظهر مجموعة الأوامر المختلفة لينتقل بذلك إلى شاشة أخرى تحتوي على مجموعة من الاختيارات أو أسئلة أخرى وهكذا حتى يتم تحديد العملية تحديداً دقيقاً يقوم بعدها البرنامج بتنفيذ العملية المطلوبة . أي أن البرنامج يعتمد على أسلوب الحوار مع المستخدم من خلال طرح الأسئلة والاختيارات المختلفة وما على المستخدم سوى اختيار المناسب منها .

وأفضل أسلوب لتعلم استخدام هذا البرنامج هو أسلوب التعلم من خلال الممارسة لذا فإن هذا الفصل يعتمد على شرح البرنامج من خلال

(\*) برنامج Microstat هو أحد البرامج المعلة من قبل شركة Ecosoft ويعمل على عدة أنواع من الحاسبات الشخصية . النسخة المستخدمة هنا هي النسخة رقم ٤,١ (Ver. 4.1) والمستخدمة على أجهزة IBM الشخصية .



عرض للنتائج والاختيارات التي يقدمها هذا البرنامج والاختيار المستخدم والتي سوف يكتب بالخط العريض ويغلف بإطار يميزه عن باقي أوامر ونتائج البرنامج . للبدء في تشغيل البرنامج نضع القرص Diskette الذي يحتوي على البرنامج في قارئ الأقراص رقم (١) في الجهاز Disk Drive ثم نشغل الحاسب الآلي ليعمل البرنامج تلقائياً إلى أن تظهر على الشاشة قائمة الاختيارات الأساسية لهذا البرنامج والموضحة في الشكل (١٢ - ١) وهي عبارة عن اختيارات لطرق وأساليب تحليل إحصائية مختلفة معرفة بحرف من (A) إلى (P) نختار أيّاً منها بالضغط على الحرف المقابل لكل عملية . ولفهم معنى هذه العملية فإن الجدول التالي يترجم معاني واستخدامات هذه العملية :

اختيار إدخال البيانات وعرضها ومعالجتها A	I تحليل السلاسل الزمنية
اختيار لاجماد المقاييس الإحصائية الوصفية B ( الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري . . . الخ ) .	J الطرق الإحصائية اللامعلمية
اختيار خلق جداول تكرارية لبيانات ملف يحتوي C على قيم متغيرات مختلفة .	K الجداول الثنائية واختبار كا <sup>٢</sup>
اختبارات الفروض الإحصائية الخاص بالمتوسط D الحسابي .	L التباديل والتوافيق
E تحليل التباين	M التوزيعات الاحصائية
F رسم بيانات متغيرين	N اختبارات الفروض للنسب
G معامل الارتباط الخطي ومجموع المربعات .	O اختيار تغيير لون البرنامج والمعالم المؤثرة في تشغيله .
H الانحدار الخطي البسيط والمتعدد .	P اختيار إنهاء البرنامج

### OPTIONS :

- |                              |                                      |
|------------------------------|--------------------------------------|
| A. DATA MANAGEMENT SUBSYSTEM | I. TIME SERIES ANALYSIS              |
| B. DESCRIPTIVE STATISTICS    | J. NONPARAMETRIC STATISTICS          |
| C. FREQUENCY DISTRIBUTIONS   | K. CROSSTAB/CHI-SQUARE TESTS         |
| D. HYPOTHESIS TESTS : MEAN   | L. PERMUTATIONS/COMBINATIONS         |
| E. ANALYSIS OF VARIANCE      | M. PROBABILITY DISTRIBUTIONS         |
| F. SCATTERPLOT               | N. HYPOTHESIS TESTS: PROPORTION      |
| G. CORRELATION MATRIX        | O. [ Identification / Installation ] |
| H. REGRESSION ANALYSIS       | P. [ Terminate ]                     |

ENTER : OPTION :

A

### شكل رقم (١٢ - ١) الاختيارات الأساسية لبرنامج ميكروستات

من شاشة الاختيارات الأساسية نختار أول اختيار (A) والخاص بإدخال البيانات ومعالجتها وهو أول عملية في إدخال واستخدام هذا البرنامج في تحليل البيانات والتي تعتمد عليها باقي الاختيارات في التحليل ، تظهر بعد ذلك شاشة أخرى لعمليات ادخال وتصحيح وعرض ومعالجة البيانات كما هو موضح بالشكل (١٢ - ٢) أدناه ومعناها :

### DATA MANAGEMENT SUBSYSTEM

#### DATA FILE OPTIONS :

- |                            |                              |
|----------------------------|------------------------------|
| A. ENTER DATA              | H. DELETE CASES              |
| B. LIST DATA               | I. VERTICAL AUGMENT          |
| C. EDIT DATA               | J. SORT                      |
| D. RENAM FILE/EDIT HEADER  | K. RANK-ORDER                |
| E. FILE DIRECTORY          | L. LAG TRANSFORMATIONS       |
| F. DESTROY FILES           | M. READ/WRITE EXTERNAL FILES |
| G. RECODE/TRANSFORM/SELECT | N. TRANSPOSE FILE            |
|                            | O. [ Terminate ]             |

ENTER : OPTION :

A

### شكل رقم (١٢ - ٢) اختيارات إدخال ومعالجة البيانات

A	إدخال بيانات في ملف	H	إلغاء مشاهدات من ملف
B	عرض بيانات من ملف على الشاشة أو الطباعة	I	الزيادة الرأسية للبيانات ( المتغيرات )
C	تصحيح بيانات في ملف	J	ترتيب البيانات تصاعدياً
D	تغيير اسم ملف أو عنوان بياناته	K	إنجاء رتب بيانات
E	عرض أسماء الملفات المتوفرة	L	تحويلات الفروق الزمني للمتغيرات
F	إلغاء الملفات غير المرغوب فيها	M	قراءة ملفات من غير برنامج ميكروستات
G	اختيار لخلق متغيرات جديدة من أخرى في الملف أو ترميز البيانات أو دمج بيانات ملفين معاً أو اختيار بعض متغيرات ملف معين وإداعها في ملف آخر	N	تحويل المشاهدات إلى متغيرات والمكس .
		O	اختيار الانتهاء من هذه الاختيارات والرجوع إلى الاختيارات الأساسية

وللبداء بإدخال البيانات نقوم باختيار إدخال البيانات (A) من الشكل (١٢ - ٢) لتظهر لنا شاشة أخرى تحتوي على أربعة اختيارات أخرى كما يتضح في شكل (١٢ - ٣) على النحو التالي :

A	خلق ملف جديد لبيانات
B	إضافة بيانات جديدة إلى ملف قديم
C	إضافة مشاهدات في أماكن محلحة من ملف قديم
D	اختبار إنهاء والعودة إلى الخيارات السابقة

ولخلق بيانات جديدة نقوم باختيار (A)

#### A. ENTER DATA.

OPTIONS : ☐ A. START NEW FILE  
☐ B. ADD DATA TO EXISTING FILE  
☐ C. INSERT CASE (S) INTO EXISTING FILE  
☐ D. [ Terminate ]

ENTER : OPTION :

شكل (١٢ - ٣)  
 اختيارات طرق إدخال البيانات

يقوم البرنامج بعدها بالسؤال عن اسم الملف المراد استخدامه في وضع البيانات فنضع اسم (EXP 2 - 1) مثلاً حيث سندخل فيه بيانات المثال رقم ( ٢ - ١ ) في الفصل الثاني من الكتاب والخاصة بدرجات ٨٠ طالباً في مادة المحاسبة ، ليقوم البرنامج بالسؤال عن وصف الملف ( File Label ) وهي عملية اختيارية ، فنقوم بكتابة : «Grade of 80 Stusents in Accounting» in Accounting» لوصف بيانات الملف . بعدها يقوم البرنامج بالسؤال عن عدد المتغيرات المراد ادخالها في الملف ومن ثم عن اسمائها وفي النهاية يتأكد البرنامج من صحة المعلومات قبل الاستمرار وذلك بالسؤال عن صحتها فإن كانت كذلك أجبتنا بنعم ☐ Y . وشكل ( ١٢ - ٤ ) التالي يوضح هذه الخطوات :

اسم الملف  
ENTER : FILE NAME :

وصف بيانات الملف  
ENTER : FILE LABEL :

عدد المتغيرات .....  
ENTER: NUMBER OF VARIABLES :

اسم المتغير .....  
ENRRER: NAME FOR VARIABLE 1 :

التأكد على صحة الأسماء .....  
NAMES OK (Y, N) ?

شكل ( ١٢ - ٤ )

خطوات ادخال بيانات ملف (EXP 2-1)

بعد ذلك يقوم البرنامج بعرض جدول من الأوامر المساعدة في عملية إدخال البيانات أثناء عملية الإدخال وهي كما في الشكل أدناه تعني :

B الرجوع إلى المتغير السابق لنفس الملاحظة


R الرجوع إلى بداية الملاحظة ( أول متغير في الملاحظة)

= إدخال رقم الملاحظة كقيمة للمتغير

, or Space فاصلة أو مسافة لإدخال قيمة المتغير للملاحظة السابقة

نقطة للبيانات المفقودة عن المتغير المراد إدخال قيمته

زر الإدخال لإدخال صفر أو القيمة السابقة (للمتغير السابق من نفس الملاحظة).

Return 

الأرقام من صفر إلى ٩ لإدخال القيمة الرقمية - عدا ذلك فإن البرنامج لن يقبل خلاف ذلك .

0 - 9

End اختيار إنهاء عملية الإدخال والبدء بتخزين الأرقام في الملف

#### Input Character Summary (See Manual for Details)

Character(s)	Result
B	Back-up one entry
R	Restart at beginning of case
=	Enters case number
, or space	Enters value for previous case
	Enters Missing data code
RETURN	Enters 0 or previously entered data
END	Terminates data input
Other	Enters a number if valid, else error message

PRESS ANY KEY TO CONTINUE.

بعد ذلك نقوم بإدخال درجات الثمانين طالباً في مادة المحاسبة للمثال (٢ - ١) وهي كما يلي :

HEADER DATA FOR : A : EXP 2-1 LABEL: grade of 80 students in accounting

NUMBER OF CASES: 80 NUMBER OF VARIABLES: 1

رقم الملاحظة	درجات الطلاب
	grade
1	93
2	75
3	72
4	60
5	71
6	75
.	.
.	.
.	.
75	61
76	66
77	96
78	79
79	65
80	86
81	E

إنهاء عملية الإدخال ←

بعد الانتهاء من ادخال البيانات في الملف (EXP 2-1) يعود البرنامج إلى شاشة الاختيارات في الشكل (١٢ - ٢) سابقاً . وللتأكد من صحة إدخال البيانات سوف نقوم باختيار (B) لعرض البيانات المدخلة والتأكد من صحة إدخالها . لينتقل البرنامج إلى السؤال عن اسم الملف الذي يحتوي على البيانات المطلوبة فنقوم بكتابة اسم الملف (EXP 2-1) ونضغط زر الإدخال .

## B. LIST DATA.

OPEN FILE : EXP 2-1 (PRESS 'RETURN' TO USE OPEN FILE)

ENTER : FILE NAME :

اسم الملف الذي يحتوي  
البيانات المراد عرضها

ملاحظة :

حيث ان الملف (EXP 2-1) كان آخر ملف تعامل البرنامج معه فإن البرنامج لا يزال على اتصال مع هذا الملف وهذا يتضح من العبارة السابقة للعبارة التي يطلب فيها البرنامج اسم الملف المطلوب فإن كان الملف المفتوح لدى البرنامج هو الملف المطلوب التعامل معه فإننا نكتفي بالضغط على زر الإدخال  ليقوم البرنامج بالتعامل مع نفس الملف .

يقوم البرنامج بعدها بعرض معلومات عن عدد المتغيرات وعدد المشاهدات في الملف المختار وكذلك أسماء وأرقام المتغيرات فيه ثم يعرض البرنامج طرق اختيار العرض : على الشاشة ، على صفحة جديدة من الطابعة أو على نفس الصفحة في الطابعة أو طباعة النتائج في ملف يخزن على أقراص التخزين «Diskette» في الصورة التالية :

OPTIONS :  
A. SCREEN OUTPUT  
B. PRINTER OUTPUT WITH FORMFEEDS  
C. PRINTER OUTPUT WITHOUT FORMFEEDS  
D. TEXT FILE OUTPUT  
E. OUTPUT PRINTER SET-UP CODES  
F. CHANGE PRINTER WIDTH. CURRENT VALUE: 80

ENTER : OPTION :

ولعرض البيانات على الشاشة نقوم باختيار (A)

OPTIONS : A. LIST ALL CASES (80)

B. LIST SUBSET OF CASES

ENTER : OPTION :  ← - - - - - اختيار عرض جميع المشاهدات

OPTIONS : A. LIST ALL VARIABLES WITH SAME FORMAT

B. LIST SELECTED VARIABLES AND/OR SELECTED FORMATS

ENTER: OPTION:  - - - - - اختيار عرض جميع المتغيرات بنفس المواصفات

ENTER : NUMBER OF PLACES TO BE DISPLAYED TO RIGHT OF


DECIMAL :

↑  
----- عدد الخانات العشرية بعد الفاصلة .

ثم يقوم البرنامج بالسؤال عما إذا أردنا عرض جميع المشاهدات وعددها ٨٠ مشاهدة هنا أم أجزاء مختارة منها فنقوم باختيارها كلها ( الاختيار A ) بعدها يقوم البرنامج بالسؤال عما إذا أردنا عرض جميع المتغيرات بنفس الصورة ( أي بنفس عدد الأرقام العشرية بعد الفاصلة العشرية ) أم أننا نود اختيار طريقة للعرض مختلفة بالنسبة لكل متغير فنقوم باختيار الأول (A) ثم يسأل البرنامج عن عدد الأرقام العشرية بعد الفاصلة فنختار الرقم (صفر) للدلالة على أننا نود عرض جميع المتغيرات بدون كسور عشرية . وبعد الضغط على رقم صفر (0) تظهر على الشاشة البيانات السابقة للمثال ( ٢ - ١ ) .

فإذا كان هناك أخطاء في البيانات فلإننا نحتاج إلى تسجيل رقم المشاهدات التي تحتوي أخطاء لنعود ونصححها باستخدام الاختيار (C) في الشكل ( ١٢ - ٢ ) السابق والخاص بتصحيح البيانات حيث



يقوم هذا الاختيار بالسؤال عن اسم الملف ثم عن رقم الملاحظة التي تحتوي على الخطأ ومن ثم يعرض قيم الملاحظة لكل متغير على حدة فإن كانت القيمة صحيحة فإننا نبقى كما هي بالضغط على الزر  وإن كانت خطأ وضعنا القيمة الصحيحة وهكذا بالنسبة لباقي المتغيرات وباقي الملاحظات التي تحتوي على أخطاء .

ومن الشاشة الخاصة بإدخال البيانات في شكل ( ١٢ - ٢ ) يمكن كذلك اختيار (G) وذلك لدمج بيانات ملفين في ملف واحد أو اختيار بعض متغيرات ملف معين وتخزينها في ملف آخر باسم جديد كما يمكن استخدام متغيرات ملف معين وخلق متغيرات جديدة منها باستخدام العمليات الرياضية المتوفرة في هذا الاختيار والتي يوضحها الشكل ( ١٢ - ٥ ) أدناه وهي :

مقلوب متغير معين ولو غاربتماط طبيعية وعشرية ودالة أسية ودوال خطية وجمع وضرب وطرح وقسمة متغيرين وعمليات أخرى .

#### TRANSFORMATION CODES :

A. $1/X$	L. $X1 + X2$	T. CASE NO.
B. $\text{LOG}(X)$	M. $X1 - X2$	U. COPY
C. $\text{LN}(X)$	N. $X1 * X2$	V. SCALING
D. $\text{EXP}(X)$	O. $X1 / X2$	
E. $X^a$	P. $\text{SUMX1: X2}$	W. DUMMY
F. $a + b * X$		X. RECODE
G. Z-TRANS	Q. RND NO.	
H. $\text{ABS}(X)$	R. RND INT	Y. [REVIEW]
I. $\text{ROUND}(X)$	S. RND NORM	Z. [EXOT]
J. $\text{TRUNC}(X)$		
K. $\text{FRAC}(X)$		

ENTER MENU SELECTION FOR RECODE/TRANSFORMATION NO. 1.  
(MAX = 250). ENTER : CODE :

شكل ( ١٢ - ٥ ) التحويلات الرياضية التي يوفرها البرنامج

غير الاختيار (G) من شكل ( ١٢ - ٢ )

بعد الخطوات السابقة والتأكد من صحة البيانات المدخلة فإن البيانات سوف تخزن في الملف (EXP 2-1) لاستخدامها في المستقبل حتى وإن تم إغلاق جهاز الحاسب الآلي، بعد ذلك دعنا نترك هذه الاختيارات لإدخال ومعالجة البيانات ونعود إلى شاشة الاختيارات الأساسية في شكل (١٢-١) وذلك بالاختيار (O) وهو اختيار إنهاء عمليات الإدخال والتعديل للبيانات «Terminate» عند ذلك يمكننا الاستمرار في حساب المقاييس الإحصائية المختلفة على البيانات المتوفرة في الملفات المخزنة سابقاً أو نهي البرنامج ونغلق الجهاز لنعود مرة أخرى في وقت لاحق لتحليل هذه البيانات .

بنفس الخطوات السابقة يمكن خلق ملفات لكل من الأمثلة ،  
(٢-٤) ، (٥-٥) ، (١-٧) ، (٥-٧) ، (١-٨) ،  
(٦-٨) في الكتاب وذلك لاستخدامها فيما بعد في التحليل الإحصائي وسوف تحمل هذه الملفات الأسماء : (EXP 4-2) ، (EXP 5-5) ،  
(EXP 7-1) ، (EXP 7-5) ، (EXP 8-1) ، (EXP 8-6) ، على التوالي .

## ٢ - استخدام البرنامج في تحليل البيانات الإحصائية :

بعد أن رأينا كيف تتم عملية خلق ملف بيانات يتضمن المتغيرات والبيانات الإحصائية وكيفية إدخال المشاهدات وتعديلها وخلق متغيرات جديدة منها نتقل الآن إلى استخدام الأوامر المختلفة لتنفيذ التحليلات الإحصائية المطلوبة مستخدمين بذلك البيانات الإحصائية المخزنة سابقاً باستخدام أمر تخليق البيانات في هذا البرنامج بالإضافة إلى بيانات أخرى . وسوف نستخدم البيانات هذه في إيجاد مقاييس إحصائية بسيطة ( وسط حسابي - انحراف معياري - . . . . . ) ، خلق جداول تكرارية من بيانات خام ، معاملات الارتباط الخطي وتحليل الانحدار الخطي البسيط

والمتمدد ، مستخدمين بذلك الاختيارات الأساسية التالية لهذا البرنامج وهي : ( B ، C ، G ، H ) على التوالي .

#### \* المقاييس الاحصائية الوصفية :

لاختيار أمر تنفيذ حساب المقاييس الاحصائية الوصفية نضغط على الاختيار (B) من قائمة الاختيارات الأساسية لبرنامج Microstat في شكل ( ١٢ - ٢ ) ليقوم البرنامج بعدها بإدخالنا إلى مجموعة من الأوامر والاختيارات الأخرى الخاصة بهذه العملية بدءاً بالسؤال عن اسم الملف الذي يحتوي البيانات الاحصائية المراد إيجاد مقاييسها الاحصائية الوصفية . وسوف نستخدم هنا بيانات المثال ( ٤ - ٢ ) في الكتاب أي ملف ( EXP 4-2 ) .

ثم يقوم البرنامج بالسؤال عما إذا أردنا إدخال جميع المشاهدات في الملف في حساب المقاييس الاحصائية الوصفية للمتغيرات أم جزء منها . وسوف نختار الاختيار (A) للدلالة على أننا سوف نستخدم جميع المشاهدات .

يقوم البرنامج بعد ذلك بعرض اختارين أحدهما يتضمن الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري أكبر قيمة وأصغر قيمة للمتغيرات وهو الاختيار (A) أما الاختيار (B) فيتضمن جميع المقاييس السابقة وأكثر . فدعنا نجرب الاختيار (A) كما يلي :

OPTIONS : A. SHORT FORM OUTPUT (MEAN, STD. DEV., MIN, MAX)  
B. EXTENDED OUTPUT OF SELECTED VARIABLES  
C. [ Terminate ]

ENTER : OPTION :

بعد ذلك يقوم البرنامج بعرض عدة طرق لإخراج النتائج هي :

- A. إخراج النتائج على شاشة الجهاز
- B. إخراج النتائج على الطابعة مع بدء صفحة جديدة
- C. إخراج النتائج على الطابعة بدون التقدم صفحة جديد
- D. إخراج النتائج على ملف الكتروني مخزون في أقراص تخزين  
أو اختيارات أخرى لتغيير شكل الطابعة على الطابعة

OPTIONS : A. SCREEN OUTPUT  
B. PRINTER OUTPUT WITH FORMFEEDS  
C. PRINTER OUTPUT WITHOUT FORMFEEDS  
D. TEXT FILE OUTPUT  
E. OUTPUT PRINTER SET-UP CODES  
F. CHANGE PRINTER WIDTH. CURRENT VALUE: 80

ENTER : OPTION : A

ولاختيار عرض النتائج على الشاشة نختار (A)

يقوم البرنامج بعدها بحساب المقاييس الوصفية الأربعة وإظهارها للمتغير (X) في الملف (EXP 4-2) والذي يحتوي القيم التالية : ٦٤٥ ، ٦٥٥ ، ٦٦٥ ، ٦٧٥ ، ٦٨٥ ، كما هو واضح أدناه حيث يظهر عدد المشاهدات ، المتوسط الحسابي ، الانحراف المعياري ، أقل قيمة ، وأكبر قيمة لبيانات المتغير (X) .

#### DESCRIPTIVE STATISTICS

HEADER DATA FOR : A : EXP 4-2 LABEL:  
NUMBER OF CASES : 5 NUMBER OF VARIABLES : 1

Mean of Variable for Example (4-2)

NO.	NAME	N	MEAN	STD. DEV.	MINIMUM	MAXIMUM
1	X	5	665.0000	15.8114	645.0000	685.0000

ولكي نجرب الاختيار (B) في حساب المقاييس الإحصائية البسيطة سوف نختار الاختيار (B) للدلالة على أننا نحتاج إلى المزيد من العمليات الحسابية في هذا البرنامج ( برنامج حساب المقاييس الوصفية للمتغيرات). وعند اختيار ذلك تظهر شاشة العرض اسم الملف المستخدم ومعلومات عن أسماء المتغيرات وعددها وعدد المشاهدات فيه .

ثم نختار طريقة العرض المطولة للتائج ( الاختيار B ) والذي يتضمن مجموعة كبيرة من المقاييس الإحصائية الوصفية سوف يقوم البرنامج بعرضها والسؤال عما إذا كنا نود حساب كل منها .

وكذلك نختار طريقة عرض النتائج على شاشة الجهاز ( الاختيار

( A ) .

OPTIONS : A. SHORT FORM OUTPUT (MEAN, STD. DEV., MIN, MAX)

B. EXTENDED OUTPUT OF SELECTED VARIABLES

C. [ Terminate ]

ENTER : OPTION :

بعد ذلك يقوم البرنامج بعرض أسماء المقاييس الإحصائية الوصفية التي يمكنه حسابها والسؤال عما إذا كنا نود حساب كل منها بالإجابة بـ (Y) أو لا نريد فنحجب بـ (N) . وهذه المقاييس هي على التوالي : الوسط الحسابي ، التباين والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف للعينه ، التباين والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف للمجتمع ، الخطأ المعياري ، أكبر وأصغر القيم ، المجموع ومجموع المربعات ومجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي ، العزوم حول الوسط الحسابي ومعامل الالتواء ومعامل التفرطح ، وأخيراً الاختبار الطبيعي لجودة التوفيق ونختار أيها منها بالإجابة بـ (Y) وقد اخترناها جميعاً أدناه فيما عدا الاختبار

الطبيعي لجودة التوفيق حيث أنهى البرنامج سلسلة المقاييس بالسؤال والتأكيد على صحة اختيارنا فأجبنا بنعم ( Y ) .

ليقوم البرنامج بعدها بالسؤال عن رقم المتغير المراد حساب ذلك له فنضع رقم المتغير وإن لم نتذكر ذلك فإننا نجيب بـ (L) وذلك ليقيم البرنامج بعدها بعرض أرقام وأسماء كل المتغيرات المتوفرة في الملف .

SELECT WHICH OF THE FOLLOWING VALUES ARE TO BE CALCULATED:

ARITHMETIC MEAN (Y, N) ? ☒ Y

SAMPLE STANDARD DEVIATION, VARIANCE, AND COEFF. OF VAR.

(Y, N) ? ☒ Y

POPULATION STANDARD DEVIATION, VARIANCE, AND COEFF. OF VAR. (Y,N)? ☒ Y

STANDARD ERROR (Y, N)? ☒ Y

MAXIMUM, MINIMUM (Y, N)? ☒ Y

SUM, SUM OF SQUARES, DEVIATION SS (Y, N)? ☒ Y

MOMENTS ABOUT MEAN, SKEWNESS, KURTOSIS (Y, N)? ☒ Y

NORMAL DISTRIBUTION GOODNESS OF FIT TEST (Y, N)? ☐ N

SELECTION OK (Y, N)? ☒ Y

بعد ذلك نختار المتغير المراد حساب المقاييس الوصفية أعلاه له من قائمة المتغيرات في الملف الذي نتعامل معه ( لدينا في الملف EXP 4-2 متغير واحد فقط هو X ) .

يقوم البرنامج بعد ذلك بعرض المقاييس السابقة للمتغير (X) كما هي مينة أدناه :

## DESCRIPTIVE STATISTICS

HEADER DATA FOR : A : EXP 4-2 LABEL :

NUMBER OF CASES: 5 NUMBER OF VARIABLES : 1

extended summary statistics for example (4-2)

VARIABLE NAME : X N = 5

extended summary statistics for example (4-2)

ARITHMETIC MEAN = 665

SAMPLE STD. DEV. = 15.811388301

SAMPLE VARIANCE = 250

COEFFICIENT OF VARIATION = 2.377652376%

POPULATION STD. DEV. = 14.142135624

POPULATION VARIANCE = 200

COEFFICIENT OF VARIATION = 2.126636936%

STANDARD ERROR OF THE MEAN = 7.071067812

MINIMUM = 645

MAXIMUM = 685

SUM = 3325

SUM OF SQUARES = 2212125

DEVIATION SS = 1000

1ST MOMENT = 0

2ND MOMENT = 200

3RD MOMENT = 0

MOMENT COEFFICIENT OF SKEWNESS = 0

4TH MOMENT = 68000

MOMENT COEFFICIENT OF KURTOSIS = 1.7

لإنهاء هذا الاختيار والعودة إلى شاشة الاختيارات الأساسية في شكل (١٢ - ١) نقوم باختيار (E) عند السؤال عن رقم المتغير التالي ، لنعود إلى الاختيارات في إعادة النتائج أو إعادة العمليات الحسابية للمقاييس الوصفية أو إنهاء هذا البرنامج والعودة إلى الشاشة الأساسية للاختيارات فنختار الانهاء . كما هو موضح أدناه .

ENTER: VARIABLE TO BE OUTPUT

(E = End, L= List VAR. NAMES) :

OPTIONS : A. REPEAT OUTPUT

B. MORE COMPUTATIONS

C. [ Terminate ]

ENTER : OPTION :

### \* تكوين الجداول التكرارية :

عندما يصل البرنامج إلى شاشة الاختيارات الأساسية مرة أخرى نستطيع بعدها اختيار أي عملية إحصائية أخرى وتنفيذها لنفس الملف المفتوح أو اختيار ملف بيانات آخر . ولتكوين جدول تكراري لبيانات المثال ( ٢ - ١ ) والخاص بدرجات ٨٠ طالباً في مادة المحاسبة نختار (C) من قائمة الاختيارات الأساسية من الشكل ( ١٢ - ١ ) . وبعد اختيار اسم الملف المراد استخدامه ( EXP 2-1 ) يقوم البرنامج بعرض اختياريين ، (A) وخاص بتكوين الجداول التكرارية و (B) وخاص بعدد القيم في الملف المستخدم والتي تساوي قيمة معينة مختارة لمتغير محدد في الملف فنختار (A) . ثم نختار طريقة عرض النتائج على الشاشة ونحدد طول فترة الجدول التكراري لتكون ٥ درجات والقيمة الابتدائية للفترة الأولى في الجدول التكراري ( أي الحد الأدنى للفترة الأولى ) لتكون ٥٠ حيث لا توجد درجة أقل من ذلك .

OPTIONS : A. GROUPED FREQUENCY DISTRIBUTION

B. COUNT INDIVIDUAL VALUES

C. [ Terminate ]

ENTER : OPTION :

ENTER PARAMETERS FOR GROUPED FREQUENCY DISTRIBUTION.

ENTER : INTERVAL WIDTH :

ENTER : LOWER LIMIT OF FIRST INTERVAL :



يقوم البرنامج بعد ذلك بعرض البيانات أدناه والتي تعرض بعض المقاييس الوصفية ثم عدة جداول تكرارية للدرجات هي على التوالي .  
الجدول التكراري البسيط (FREQUENCY) والذي يمثّل جدول (٢ - ١٠) في الفصل الثاني ثم الجدول التكراري النسبي (PERCENT) ثم الجدول التكراري المتجمع الصاعد للبيانات الأصلية والنسب (CUMULATIVE) ثم بعد ذلك يرسم البرنامج المدرج التكراري للبيانات كما هو موضح أدناه :

#### DESCRIPTIVE STATISTICS

HEADER DATA FOR : A : EXP 2 - 1

LABEL : grade of 80 students in accounting

NUMBER OF CASES : 80 NUMBER OF VARIABLES : 1

mean of variable for example (2 - 1)

NO.	NAME	N	MEAN	STD. DEV.	MINIMUM	MAXIMUM
1	grade	80	75.1750	10.0263	53.0000	97.0000

#### FREQUENCY DISTRIBUTIONS

HEADER DATA FOR : A : EXP 2 - 1

LABEL : grade of 80 students in accounting

NUMBER OF CASES : 80 NUMBER OF VARIABLES : 1

VARIABLE : 1 . grade

frequency table for example (2 - 1)

CLASS LIMITS		FREQUENCY		PERCENT		CUMULATIVE FREQUENCY PERCENT	
50.00 <	55.00	1		1.25		1	1.25
55.00 <	60.00	2		2.50		3	3.75
60.00 <	65.00	10		12.50		13	16.25
65.00 <	70.00	10		12.50		23	28.75
70.00 <	75.00	12		15.00		35	43.75
75.00 <	80.00	22		27.50		57	71.25
80.00 <	85.00	9		11.25		66	82.50
85.00 <	90.00	6		7.50		72	90.00
90.00 <	95.00	4		5.00		76	95.00
95.00 <	100.00	4		5.00		80	100.00
TOTAL		80		100.00			

CLASS LIMITS		FREQUENCY	
50.00 <	55.00	1	-
55.00 <	60.00	2	
60.00 <	65.00	10	
65.00 <	70.00	10	
70.00 <	75.00	12	
75.00 <	80.00	22	
80.00 <	85.00	9	
85.00 <	90.00	6	
90.00 <	95.00	4	
95.00 <	100.00	4	

ثم نعود بعد ذلك إلى شاشة الاختيارات الأساسية في شكل (١٢ - ٢) .

#### \* معامل الارتباط الخطي :

لإيجاد معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين (س، ص) في المثال (٧ - ١) في الفصل السابع والموجود في الملف (EXP 7-1) تحت الاسمين (X)، (Y) على التوالي ، نقوم باختيار (G) من الشاشة في الشكل (١٢ - ٢) وهو الاختيار الخاص بإيجاد معاملات الارتباط بين المتغيرات المختلفة في الملف المستخدم وكذلك إيجاد مجاميع مربعات قيم المتغيرات المختلفة .

بعد الدخول في برنامج حساب معاملات الارتباط يقوم البرنامج بالسؤال عن اسم ملف البيانات والأسئلة الأخرى عن بيانات الملف ، ثم يسأل عما إذا كنا نريد إيجاد معاملات الارتباط لجميع المتغيرات أم جزء

منها وسوف نختار هنا جميع المتغيرات في الملف ( 7 - 1 EXP ) وهما المتغيرين ( X ) ، ( Y ) .

OPTIONS : A. CORRELATE ALL VARIABLES  
B. CORRELATE SELECTED VARIABLES

ENTER : OPTION :

ثم يقوم البرنامج بالسؤال عن عنوان العملية فنحجب بالضغط على زر الإدخال  للدلالة على أننا لا نود أن نكتب أي عنوان ، ليقوم البرنامج بالسؤال عن طريقة عرض النتائج فنختار الشاشة مثلاً .

ثم يقوم البرنامج بعدها بعرض ثلاثة اختيارات هي :

- A. عرض مصفوفة معاملات الارتباط الخطي للمتغيرات
- B. عرض مصفوفة التباين ومصفوفة مجاميع المربعات
- C عرض كل من المصفوفات في (A) وفي (B) أعلاه

OPTIONS : A. OUTPUT CORRELATION MATRIX  
B. OUTPUT SSCP AND VAR - COVAR.  
C. ALL OF THE ABOVE

ENTER : OPTION :

فنختار (A) للدلالة على أننا نود الحصول على مصفوفة معاملات الارتباط الخطي البسيط فقط . بعدها يعرض البرنامج المصفوفة المطلوبة والتي تمثل معامل الارتباط بين المتغيرين . حيث يمثل تقاطع الصف مع العمود معامل الارتباط بين المتغير الذي يمثل الصف والمتغير الذي يمثل العمود . فمثلاً تمثل القيمة (١) الواقعة بين تقاطع العمود المقابل للمتغير (X) والصف المقابل للمتغير (Y) معامل الارتباط بين المتغيرين ( Y , X ) وهو ارتباط طردي تام كما توضحه النتائج التالية :

# CORRELATION MATRIX

HEADER DATA FOR : A : EXP 7-1 LABEL :  
NUMBER OF CASES : 5 NUMBER OF VARIABLES : 4

	X	Y
X	1.00000	
Y	1.00000	1.00000

ولحساب معامل ارتباط الرتب (معامل ارتباط سبيرمان) لنفس البيانات في مثال (٧ - ٥) نقوم أولاً بإدخال قيم المتغيرين (س ، ص) تحت اسم (Y, X) على التوالي في ملف يحمل الاسم (EXP 7-5) مثلاً ثم نستخدم الاختيار (G) من بين الاختيارات في شكل (١٢ - ٢) لاستخدام الدوال الرياضية للبرنامج وبعض الاستخدامات السابق ذكرها عند التعامل مع الملفات مستخدمين هذا الاختيار ثم من شاشة الدوال في شكل (١٢ - ٥) نقوم باختيار (U) وذلك لنسخ المتغيرين (Y, X) تحت اسمين جديدين هما (X-Order) و (Y-Order) وبالتالي فإن الملف المستخدم سوف يحتوي على ٤ متغيرات هي (Y, X) ، (X-Order) ، (Y-Order) ثم نخرج من شاشة الاختيارات في الشكل (١٢ - ٥) بواسطة الاختيار Z (EXIT) لنعود إلى شاشة ادخال وتعديل البيانات في الشكل (١٢ - ٢) حيث نختار الاختيار (K) والخاص بإيجاد رتب المتغير حيث يقوم هذا الاختيار بإبدال القيم في كل من المتغير (X-Order) والذي يحتوي قيم المتغير (X) بقيم رتب (X) وكذلك الحال بالنسبة للمتغير (Y-Order) حيث تستبدل قيم (Y) فيه برتب المتغير (Y) وذلك بعد تحديد المتغيرات المراد إيجاد رتبها من الملف (EXP 7-5) بالمتغيرين (X-Order) و (Y-Order) فقط من مجموع المتغيرات الأربعة في هذا الملف . نعود بعد كل ذلك إلى شاشة الاختيارات الأساسية في الشكل (١٢ - ١) حيث سيكون الملف المستخدم (EXP 7-5) يحتوي

على قيم (Y, X) الأصلية ورتب هذه القيم في المتغيرين (X-Order) و (Y-Order). ثم نختار (G) من شاشة الاختيارات الأساسية في الشكل (١٢ - ٢) ونوجد معامل الارتباط بين (X-Order) و (Y-Order) لنحصل كما في السابق على معامل ارتباط هذين المتغيرين الذي هو معامل ارتباط الرتب للمتغيرين (Y, X) أي معامل ارتباط سبيرمان الخطي. والشكل التالي يمثل نتائج ذلك للمثال (٧ - ٥) حيث معامل ارتباط الرتب بين (X) و (Y) يساوي ٠,٥١٠٨٦

HEADER DATA FOR : A : EXP 7-5 LABEL : rank correlation of example  
(7-5)

NUMBER OF CASES : 10 NUMBER OF VARIABLES : 4

	X	Y	x-order	y-order
1	33.0	18.0	7.5	1.0
2	27.0	20.0	1.0	2.0
3	28.0	22.0	2.5	4.0
4	28.0	27.0	2.5	5.5
5	29.0	21.0	4.0	3.0
6	30.0	29.0	5.0	9.0
7	31.0	27.0	6.0	5.5
8	33.0	29.0	7.5	2.0
9	35.0	28.0	9.0	7.0
10	36.0	29.0	10.0	9.0

### CORRELATION MATRIX

HEADER DATA FOR : A : EXP 7-5 LABEL : rank correlation of example (7-5)

NUMBER OF CASES : 10 NUMBER OF VARIABLES : 4

spearman's rank corr. for example (7-5)

	x-order	y-order
x-order	1.00000	
y-order	.51086	1.00000

## • نماذج تحليل الانحدار الخطي :

ولاستخدام طريقة المربعات الصغرى في تقدير معاملات الانحدار للنماذج الخطية البسيطة والمتعددة يستخدم الاختيار (H) (تحليل الانحدار الخطي) في شكل (١٢-١) حيث يمكن بواسطة هذا الاختيار تقدير كل من أ، ب (a, b) في نموذج الانحدار الخطي البسيط للمتغيرين ص، س (X, Y) في الصورة

$$\text{ص} = \text{أ} + \text{ب س أي}$$

$$\hat{Y} = a + bX$$

وكذلك اختبار صلاحية هذا النموذج في تمثيل العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغير المستقل (X) عن طريق تحليل التباين .

ويمكن استخدام النماذج الخطية في هذا الاختبار عندما يكون لدينا أكثر من متغير مستقل واحد (متغيرين مستقلين  $X_1$  ،  $X_2$  مثلاً أو أكثر) حيث يكون النموذج الخطي في حالة المتغيرين المستقلين في الصورة :

$$\text{ص} = \text{أ} + \text{ب}_1 \text{س}_1 + \text{ب}_2 \text{س}_2 \text{ أي :}$$

$$\hat{Y} = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

ويمكن اختبار صلاحية النموذج في تمثيل العلاقة مع المتغير المستقل (Y) وكذلك صلاحية وجود كل من المتغيرات المستقلة في العلاقة .

ولإيضاح ذلك سوف نختار (G) من قائمة الاختيارات في شكل (١٢-١) .

بعد الدخول في برنامج تحليل الانحدار يقوم البرنامج بالسؤال عن اسم الملف الذي يحتوي البيانات وسوف نستخدم بيانات المثال ( ٨-١ )

والذي يحتوي على درجات ١٠ طلاب في مادة المحاسبة (X) ومادة الاحصاء (Y) (الدرجة من ٢٠) . يقوم البرنامج بعرض معلومات عن الملف ثم يسأل عما إذا أردنا التعامل مع جميع المشاهدات أم جزء منها وعما إذا أردنا التعامل مع جميع المتغيرات أم جزء منها وسوف نختار هنا جميع المشاهدات العشر وجميع المتغيرات (X) ، (Y) . ثم يطلب البرنامج رقم المتغير التابع (Dependent) في النموذج المراد تقديره وسوف نختار المتغير رقم (٢) أي (Y) ضمن سلسلة المتغيرات في الملف حيث يحمل (X) رقم (١) و (Y) رقم (٢) أي أننا سوف نتنبأ بدرجة الطالب في الاحصاء (Y) بدلالة درجته في المحاسبة (X) . بعدها يعرض البرنامج أسماء المتغيرات المستقلة والمتغير التابع وأرقام كل منها مع مقاييس وصفية لكل منها تحتوي على المتوسط الحسابي والانحراف المعياري كما يتضح فيما يلي :

HEADER DATA FOR : A : EXP 8 - 1

LABEL : grade of ten students in acc. and stat.

NUMBER OF CASES : 10

NUMBER OF VARIABLES : 2

	x	y
1	11	19
2	7	11
3	15	16
4	9	15
5	6	10
6	8	8
7	9	7
8	9	12
9	13	15
10	13	17

## REGRESSION ANALYSIS

HEADER DATA FOR : A : EXP 8-1 LABEL : grade of ten students in acc. and stat.

NUMBER OF CASES : 10 NUMBER OF VARIABLES : 2

INDEX	NAME	MEAN	STD. DEV.
1	x	10.0000	2.9059
DEP. VAR. :	y	13.0000	4.0000

يقوم بعدها البرنامج بالاستفسار عن عدد المتغيرات المستقلة (Independent) المراد استخدامها في النموذج الخطي فنقوم بكتابة (١) للدلالة على أننا سنستخدم متغيراً مستقلاً واحداً (نموذج انحدار خطي بسيط) ومتغيراً تابعاً واحداً. بعد ذلك يقوم البرنامج بالسؤال عن دليل المتغير المستقل (رقم المتغير) من السلسلة السابقة مباشرة لأرقام المتغيرات التي قام البرنامج بعرضها فنختار رقم (١) للدلالة على المتغير (X) ثم يتأكد البرنامج من صحة اختيارنا فنجيب بنعم (Y) ومن ثم يسأل عما إذا أردنا حساب الانحرافات وحساب مقياس (درين واتسون) فنختار الأول ونرفض الثاني مثلاً ثم يستفسر البرنامج عن عدد الأرقام بعد الفاصلة العشرية المراد استخدامها في عرض النتائج لنختار رقماً بين الصفر و٩ (الرقم المبدئي هو ٤ أرقام عشرية)، ولاختيار الرقم المبدئي نضغط على زر الإدخال ← ليقوم البرنامج بعرض نتائج تحليل الانحدار البسيط بين (Y)، (X) على أساس النموذج الخطي :  $(\hat{Y} = a + bx)$  ويعرض كذلك نتائج تحليل التباين للانحدار الخطي البسيط كما يلي :



ENTER : INDEX OF PREDICTOR VARIABLES :

1

SELECTION OK (Y, N) ?

Y

CALCULATE RESIDUALS (N, Y) ?

Y

DURBIN - WATSON TEST (N, Y) ?

N

enter : NUMBER OF DECIMAL PLACES TO BE DISPLAYED FOR COEFFICIENTS

(VALID RANGE = 0 To 9 ; Default Value 0 4) :

4

وكما يتضح من النتائج أدناه فإن  $a = 3,5263$  و  $b = 0,9474$   
معامل الارتباط الخطي  $r = 0,6882$  ومعامل التحديد  $r^2 = 0,4737$  كما  
يعرض قيمة (Y) الأصلية و (Y) المتنبأ بها (Calculated) من النموذج  
الخطي . والبواقي أو الانحرافات (Residual) مع توضيح بياني لها .

DEPENDENT VARIABLE : y

VAR.	REGRESSION COEFFICIENT	STD.ERROR	T(DF= 8)	PROB.
x	.9474 ← (أ)	.3531	2.683	.02778
CONSTANT	3.5263 ← (ب)			

STD. ERROR OF EST. = 3.0779

r SQUARED = .4737

r = .6882

### ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

SOURCE	SUM OF SQUARES	D. F.	MEAN SQUARE	FRATIO	PROB.
REGRESSION	68.2105	1	68.2105	7.200	.0278
RESIDUAL	75.7895	8	9.4737		
TOTAL	144.0000	9			

OBSERVED	CALCULATED	RESIDUAL	STANDARDIZED	
			RESIDUALS	2.0
1 19.000	13.947	5.0526		*
2 11.000	10.158	.8421		*
3 16.000	17.737	-1.7368	*	
4 15.000	12.053	2.9474		*
5 10.000	9.211	.7895		*
6 8.000	11.105	-3.1053	*	
7 7.000	12.053	-5.0526	*	
8 12.000	12.053	-.0526		*
9 15.000	15.842	-.8421	*	
10 17.000	15.842	1.1579		*

ويمكن إجراء نفس التحليل السابق للمثال رقم ( ٨ - ٦ ) حيث لدينا

متغير تابع واحد هو (ص) أو (Y) ومتغيران مستقلان س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> أو X<sub>1</sub> و X<sub>2</sub> حيث نموذج الانحدار الخطي المتعدد على الصورة :

$$\text{ص} = \text{أ} + \text{ب}_1 \text{س}_1 + \text{ب}_2 \text{س}_2$$

أو

$$\hat{Y} = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

نختار (Y) كمتغير تابع بنفس الطريقة السابقة وذلك بتحديد الرقم المقابل للمتغير (Y) ثم نحدد عدد المتغيرات المستقلة بـ ٢ أي متغيرين مستقلين ثم نحدد أرقام المتغيرين X<sub>1</sub> و X<sub>2</sub> لنحصل أخيراً على النتائج التالية :

#### REGRESSION ANALYSIS

HEADER DATA FOR : A: EXP 8-6 LABEL :  
NUMBER OF CASES : 10 NUMBER OF VARIABLES : 3

multiple regression for example (8-6)

INDEX	NAME	MEAN	STD. DEV.
1	X1	6.9000	2.5144
2	X2	22.1000	2.0248
DEP. VAR. :	Y	6.5000	2.7588

DEPENDENT VARIABLE : y

VAR.	REGRESSION		T(DF = 7)	PROB.	PARTIAL $r^2$
	COEFFICIENT	STD.ERROR			
x1	.8846	.1962	4.507	.00277	.7438
x2	-.2797	.2437	-1.148	.28884	.1583
CONSTANT	6.5770				

STD. ERROR OF EST. = 1.3999

ADJUSTED R SQUARED = .7425

R SQUARED = .7997

MULTIPLE R = .8943

حيث :

$$6,0770 = a$$

$$0,8846 = b_1$$

$$0,2797- = b_2$$

معامل الارتباط الكلي (r) = 0,8943

معامل التحديد (r<sup>2</sup>) = 0,7997

ويعرض كذلك معاملات الارتباط الجزئي في العمود الأخير .

ويمكن بعد ذلك تقدير نماذج أخرى بتغيير المتغير التابع أو عدد المتغيرات المستقلة أو اختيار متغيرات مستقلة مختلفة أو حتى استخدام النموذج الخطي المقلد في التنبؤ عندما نحدد قيم معينة للمتغيرات المستقلة فيه وذلك باختيار إحدى الاختيارات الستة التالية لتحليل الانحدار :

- A. — اختيار تغيير المتغيرات المستقلة لنفس المتغير التابع
- B. — اختيار تغيير المتغير التابع في النموذج الخطي
- C. — إعادة طباعة نتائج التحليل باستخدام الشاشة أو الطباعة أو ملف .
- اختيار حساب قيم المتغير التابع المتبأ بها لقيم معينة من المتغيرات المستقلة .
- D.

– اختيار وضع بيانات الانحرافات والقيم المتنبأ بها مع ملف

E. البيانات الأصلية .

F. اختيار انتهاء برنامج تحليل الانحدار الخطي .

OPTIONS : A. ANOTHER SET OF PREDICTORS FOR DEP. VAR: Y

B. CHANGE DEPENDENT VARIABLE

C. REPEAT OUTPUT FROM PREVIOUS ANALYSIS

D. CALCULATE PREDICTED VALUES

E. OUTPUT RESIDUALS TO DATA FILE

F. [ Terminate ]

ENTER : OPTION : **D**

ولاستخدام النموذج المقدر السابق :

$$\text{ض} = ٦,٥٧٧٠ + ٠,٨٨٤٦ \text{س}_١ - ٠,٢٧٩٧ \text{س}_٢$$

في التنبؤ عندما تكون  $\text{س}_١ = ٧$  و  $\text{س}_٢ = ٢٠$  مثلاً نختار (D) من قائمة الاختيارات أعلاه وذلك لحساب القيمة المقدرة لـ (ض أو Predicted Y Value) عندما تكون  $\text{س}_١ = ٧$  و  $\text{س}_٢ = ٢٠$  حيث يقوم البرنامج بالسؤال عن قيم كل من ( $\text{X}_١$ ) و ( $\text{X}_٢$ ) المشاهدة ثم يحسب القيمة المتنبأ بها ويطبعها على الشاشة :

$$\text{Calculated Y Value} = 7.1752$$

$$\text{أي ض} = ٧,١٧٥٢$$

نكتفي بهذا القدر من الأمثلة على استخدام برنامج ميكروستات «Microstat» في ادخال وتعديل وتحليل البيانات الإحصائية . وتجدر الإشارة إلى أن هذا البرنامج يمكن استخدامه في :

(Time Series Analysis)

• تحليل السلاسل الزمنية

(Hypothesis Tests: Mean)

• اختبارات الفروض الاحصائية  
للمتوسطات الحسابية

(Hypothesis tests: Proportions)

• اختبارات الفروض الاحصائية  
للنسب

(Analysis of Variance)

• اختبارات تحليل التباين

(Non Parametric Statistics)

• الاختبارات اللامعلمية

(Scatter Diagrams)

• رسم أشكال الانتشار

إضافة إلى مجموعة أخرى من العمليات والتوزيعات الاحصائية  
الأخرى .

## ثانياً : استخدام SPSS(\*) في تحليل البيانات

برنامج «SPSS» هو أحد البرامج الإحصائية الكبيرة والتي عرفت في الستينات وعلى المستوى العالمي من خلال انتشار استخدامها على الحاسبات الكبيرة «Main Frames» ، و «SPSS» هو الرمز المختصر للاسم : «Statistical Package for the Social Science» والذي يعني «البرامج الإحصائية للعلوم الاجتماعية» . وقد عرف هذا البرنامج كأحد البرامج الإحصائية التي تستخدم من خلال الحزم «Batch» أي أن المستخدم عليه أن يكتب جميع خطوات وأوامر البرنامج المراد تنفيذه ومن ثم اعطاؤه للحاسب لتنفيذه مرة واحدة ، غير أنه متوفر الآن في الأسواق على نسخة معدلة وخاصة على الحاسبات الصغيرة «Micro Computers» تستخدم طريقة المحادثة «Interactive Mode» حيث يدخل المستخدم الأمر المراد تنفيذه فيقوم البرنامج بمعالجة هذا الأمر وتنفيذه ومن ثم يتقل لسؤال المستخدم عن أمر جديد وهكذا ....

وسوف نعرض لطريقة استخدام هذا البرنامج من خلال النسخة المتوفرة على الحاسب الشخصي لشركة «IBM» وهي النسخة المسماة «SPSS /PC +» مستخدمين نفس الأمثلة المستخدمة في الجزء السابق

(\*) برنامج «SPSS» تنتجه شركة «SPSS Inc.» وعنوانها :

444 N. Michigan avenue. Chicago, Illinois.

والخاص بـ «Microstat» . يبدأ تشغيل برنامج « + PC / SPSS » بكتابة أمر التشغيل «SPSSPC» وذلك لإدخال البرنامج إلى ذاكرة الحاسب ومن ثم البدء بعملية استخدام البرنامج في تحليل البيانات الإحصائية ، وبعد عرض البرنامج لشعار « + PC / SPSS » يدخلنا إلى شاشة أخرى للبدء في عملية تعريف البيانات وتحليلها حيث ينتهي البرنامج بطباعة : SPSS/PC .

وذلك على يسار الشاشة للدلالة على أننا في برنامج « + PC / SPSS » وأن البرنامج جاهز لتلقي الأوامر والتي يجب أن تطبع بعد علامة « : » .

#### \* ادخال البيانات :

أول أمر في برنامج «SPSS» هو أمر تعريف البيانات «Data» وأسماء المتغيرات وطريقة ومكان قراءتها . فلإدخال بيانات المثال رقم ( ٤ - ٢ ) نستخدم الأمر :

SPSS/PC : data list free/x.

حيث أمر (Data List) يعرف البرنامج بأننا في صدد وضع بيانات وأن طريقة كتابتها هي باستخدام طريقة الكتابة الحرة (Free Format) أي أننا سنفصل بين المتغيرات بمسافة واحدة على الأقل دون تحديد لطريقة كتابة الأرقام . ومن ثم نضع علامة ( / ) لنبدأ بكتابة أسماء المتغيرات المراد وصفها وهي في مثالنا متغير واحد سوف نسميه (X) وبذلك فإننا قد عرفنا البيانات وأسماء المتغيرات للبرنامج ، ولإنهاء هذا الأمر نطبع نقطة ( . ) ومن ثم نضغط زر الإدخال  للانتهاء من هذا الأمر ليتنقل البرنامج لعرض الرمز (SPSS/PC:) مرة أخرى دليلاً على أنه فهم ونفذ الأمر السابق وأنه ينتظر الأمر الجديد . بعد ذلك ندخل أمراً آخر لإدخال البيانات وهو بصورة (Begin Data) . ونضغط زر الإدخال ليفهم الحاسب بأننا في صدد وضع البيانات مستخدمين لوحة المفاتيح (Key Board) ومن ثم ندخل

البيانات الواحدة تلو الأخرى إلى أن ننتهي من وضع البيانات حيث ننهاها بوضع العبارة (End Data) . عند السؤال عن القيمة التالية للمتغير ليفهم البرنامج بأننا قد انتهينا من وضع البيانات فيطبع البرنامج عبارة تدل على أنه قرأ البيانات وأن عدد المشاهدات فيها هو ٥ مشاهدات . والشكل التالي يبين هذه الخطوات كما تظهر على شاشة الجهاز .


SPSS/PC : begin data.

CASE	#	0	645
CASE	#	1	655
CASE	#	2	665
CASE	#	3	675
CASE	#	4	685
CASE	#	5	end data.

← بيانات المثال

SPSS/PC has written 5 cases to the active file

### • حساب المقاييس الاحصائية الوصفية :

عندما يعود البرنامج إلى طباعة العبارة (SPSS/PC:) للدلالة على أنه فهم الأوامر السابقة وأنه مستعد لأي أوامر أخرى . ولإيجاد المقاييس الاحصائية الوصفية نستخدم الأمر (Descriptives) ومن ثم نحدد أسماء المتغيرات المراد استخدامها لإيجاد المقاييس الاحصائية الوصفية لها وذلك بكتابة العبارة (Variables =) بعد أمر (Descriptives) وي بعدها نكتب أسماء المتغيرات وننتهي الأمر بنقطة ونضغط زر الادخال  ليقوم البرنامج بعرض اسم المتغير ، وسطه الحسابي ، انحرافه المعياري (\*) ، أصغر قيمة

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

(\*) يحسب الانحراف المعياري هنا من العلاقة

بالقسمة على (ن - ١) بدلاً من (ن) كما ذكرنا في السابق . ويسمى هذا المقياس بتقدير الانحراف المعياري للمجتمع .



فيه ، أكبر قيمة فيه وعدد المشاهدات فيه .

والشكل التالي يمثل ذلك للمتغير (X) في المثال المستخدم :

SPSS/PC : descriptives variables = X

Number of Valid Observations (Listwise) = 5.00

Variable	Mean	Std Dev	Minimum	Maximum	N	Label
X	665.00	15.81	645.00	685.00	5	

وللحصول على المزيد من المقاييس الاحصائية السابقة لنفس المتغير (X) يمكن استخدام الأمر السابق ولكن بإضافة العبارة (Statistics = all) بعد اسم المتغير (X) وانهاء الأمر بـ ( . ) وذلك للحصول على المقاييس الآتية :

Mean	المتوسط الحسابي	S. E. Mean	الخطأ المعياري للمتوسط
Std Dev	الانحراف المعياري	Variance	التباين
Kurtosis	معامل الالتواء	S. E. Kurt	الخطأ المعياري لمعامل الالتواء
Skewness	معامل التفرطح	S. E. Skew	الخطأ المعياري لمعامل التفرطح
Range	المدى المطلق	Minimum	أصغر قيمة
Maximum	أكبر قيمة	Sum	ومجموع قيم المتغير

والشكل التالي يمثل هذه الأوامر كما تظهر على شاشة البرنامج :

SPSS/PC : descriptives variables = x/ statistics = all.

Number of Valid Observations (Listwise) = 5.00

Variable X

Mean	665.000	S.E. Mean	7.071
Std Dev	15.811	Variance	250.000
Kurtosis	-1.200	S.E. Kurt	2.000
Skewness	0.0	S. E. Skew	.913
Range	40.000	Minimum	645.000
Maximum	685.000	Sum	3325.000

Valid Observations - 5 Missing Observations - 0

بعد ذلك يمكننا إجراء أي نوع من أنواع التحليل الإحصائي على بيانات المثال ( ٤ - ٢ ) أو انتهاء البرنامج وذلك بطباعة الأمر (Fin.) عند عودة البرنامج إلى عرض العبارة (SPSS/PC) أو أن نكرر الخطوات السابقة في ادخال بيانات جديدة وتعريف المتغيرات فيها وطرق قراتها والبدء بإجراء التحليل المناسب لها . والشكل التالي يمثل خطوات وأوامر ادخال وتعريف وإيجاد مقاييس احصائية وصفية للبيانات في المثال ( ٥ - ٥ ) .

SPSS/PC : data list free/x.

SPSS/PC : begin data.

CASE	#	0	5	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> 5 6 7 8 9 </div>	← بيانات المثال رقم ( ٥ - ٥ )
CASE	#	1	6		
CASE	#	2	7		
CASE	#	3	8		
CASE	#	4	9		
CASE	#	5	end data.		

SPSS/PC has written 5 cases to the active file

SPSS/PC : descriptives variables = x.

Number of Valid Observations (Listwise) = 5.00

Variable	Mean	Std Dev	Minimum	Maximum	N label
X	7.00	1.58	5.00	9.00	5

SPSS/PC : descriptives variables = x/statistics= all.

Number of Valid Observations (Listwise) = 5.00

Variable X

Mean	7.000	S. E. Mean	.707
Std Dev	1.581	Variance	2.500
Kurtosis	-1.200	S. E. Kurt	2.000
Skewness	0.0	S. E. Skew	.913
Range	4.000	Minimum	5.000
Maximum	9.000	Sum	35.000

Valid Observations - 5 Missing Observations - 0

### \* تكوين الجداول التكرارية :

لإيجاد الجدول التكراري والمدرج التكراري لبيانات المثال ( ٢ - ١ )  
نفرض أن بيانات الدرجات للثمانين طالباً قد خلقت سابقاً ووضعت في ملف  
اسمه (Grade) فلقراءة درجات الطلاب من الملف (Grade) مستخدمين  
طريقة القراءة الحرة (Free Format) نستخدم الأمر التالي والذي يعرف  
الدرجات ويضعها تحت اسم متغير (Grade) في برنامج (SPSS/PC) :


SPSS/PC : data list free file ='grade'/grade.

حيث أن أمر تعريف البيانات والمتغير هو كالأوامر السابقة على أننا أضفنا عبارة ( File = 'grade' ) وذلك لإخبار البرنامج أن عليه أن يقرأ البيانات من ملف وليس من لوحة المفاتيح مباشرة .

وللبداء في قراءة البيانات من الملف نكتب الأمر :

SPSS/PC : begin data.

حيث يقوم البرنامج بعدها بقراءة البيانات :

ولإيجاد القيم التكرارية والمدرج التكراري نستخدم الأمر : (Frequencies) ثم نتبعه بالعبارة ( Variables = ) والتي نحدد بعدها أسماء المتغيرات المراد إجراء العملية لها وهي في مثالنا المتغير (grade) بعدها يمكن أن ننهي هذا الأمر بوضع نقطة ( . ) وضغط زر الإدخال  لنحصل على القيم التكرارية للبيانات . غير أننا نستطيع الحصول على المدرج التكراري وذلك بكتابة العبارة (Histogram) بعد أسماء المتغيرات ثم نتلوها بتحديد أصغر قيمة (Min) ونضع القيمة بين قوسين « (50) Min » للدلالة على أننا نريد القيمة ٥٠ كأصغر قيمة في المدرج ثم نحدد أكبر قيمة « (100) Max » وهي في حالتنا ١٠٠ ونحدد بعد ذلك طول الفترة وهي ٥ بالعبارة « (5) Inc » وننهي الأمر بالكامل ليصبح كما هو موضح أدناه :

SPSS/PC : frequencies variables = grade/histogram min (50) max (100)

: inc (5).

يقوم بعدها البرنامج بعرض القيم التكرارية للبيانات يتلوها المدرج التكراري والذي يظهر التكرارات على المحور الأفقي ومركز الفئة على المحور الرأسي وكذلك التكرارات في كل فئة في العمود الذي يسبق المحور الرأسي في المدرج التكراري كما هو موضح أدناه :

# GRADE

VALUE LABEL Value Label

القيمة	التكرار	النسبي	التكرار النسبي المعتمد	التكرار النسبي (*) المتجمع الصاعد
Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
53.00	1	1.3	1.3	1.3
57.00	1	1.3	1.3	2.5
59.00	1	1.3	1.3	3.8
60.00	3	3.8	3.8	7.5
61.00	2	2.5	2.5	10.0
62.00	3	3.8	3.8	13.8
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
90.00	1	1.3	1.3	91.3
93.00	2	2.5	2.5	93.8
94.00	1	1.3	1.3	95.0
95.00	2	2.5	2.5	97.5
96.00	1	1.3	1.3	98.8
97.00	1	1.3	1.3	100.0
<b>TOTAL</b>	<b>80</b>	<b>100.0</b>	<b>100.0</b>	

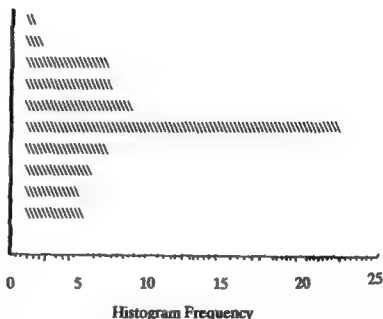
(\*) التكرار النسبي المعتمد يساوي التكرار مقسوماً على العدد الكلي للتكرارات بعد طرح القيم المفقودة منه .

## GRADE

التكرار  
Count

مركز الفئة  
Midpoint

1	52.50
2	57.50
10	62.50
10	67.50
12	72.50
22	77.50
9	82.50
6	87.50
4	92.50
4	97.50



ويمكن الحصول على المقاييس الاحصائية الوصفية باستخدام الأمر :

SPSS/PC: Descriptives Variables = Grade/Statistics = All.

أو أن نضيف عبارة ( Statistics = all ) إلى أمر (Frequencies) السابق للحصول على المقاييس أدناه في نفس الأمر وبعد المدرج التكراري المبين أعلاه ، ليصبح الأمر :

SPSS/PC : Frequencies variable = grade / histogram min (50) Max (100) inc (5)  
: /Statistics = all.

حيث يتضح أننا لم نستطيع أن نكتب جميع عبارات الأمر في سطر واحد لذلك فعند الانتهاء من السطر الأول نضغط زر الإدخال  دون وضع نقطة ( . ) في نهاية السطر ليفهم البرنامج بأننا لم نته من كتابة الأمر وأنا نحتاج إلى سطر آخر لكتابته ليتنقل البرنامج إلى السطر الثاني بادئاً بالرمز ( ) لنكتب العبارة ( /Statistics = all. )

ونتهي بالنقطة دلالة على الانتهاء من الأمر السابق . ومن ثم نحصل على النتائج التالية بالإضافة إلى النتائج السابقة .

GRADE					
Mean	75.175	Std Err	1.121	Median	75.000
Mode	75.000	Std Dev	10.026	Variance	100.526
Kurtosis	-.320	S E Kurt	1.978	Skewness	.178
S E Skew	.269	Range	44.000	Minimum	53.000
Maximum	97.000	Sum	6014.000		

ملاحظة :

يظهر ضمن البيانات أعلاه قيمة الوسيط (Median) وقيمة المنوال (Mode) وذلك إذا ما استخدم (Statistics = all) ضمن أمر (Frequencies) .

\* معاملات الارتباط الخطي :

لإيجاد معاملات ارتباط بيرسون الخطي نستخدم الأمر (Correlations) حيث نحدد المتغيرات لهذا الأمر كالسابق باستخدام العبارة (Variables) والتي نحدد بعدها المتغيرات المراد إيجاد معاملات الارتباط الخطي لها في صورة مصفوفة (Matrix) لمعاملات الارتباط كما هي معروضة في برنامج (Microstat) السابق الذكر . والخطوات التالية تمثل خطوات وأوامر إيجاد معاملات الارتباط للمتغيرين س ، ص ( أو X ، Y ) لبيانات المثال ( ٧ - ١ ) .

SPSS/PC : data list free/x y.

SPSS/PC : begin data.

CASE	#	0	1 10
CASE	#	1	5 15
CASE	#	2	9 20
CASE	#	3	13 25
CASE	#	4	17 30
CASE	#	5	end data.

بيانات المثال رقم ( ٧ - ١ )

SPSS/PC has written 5 cases to the active file

SPSS/PC : correlation variables = x y.

ثم نضغط زر الإدخال فنحصل على :

Correlations :		X	Y
X		1.0000	1.0000**
Y		1.0000**	1.0000

مصفوفة معاملات

الارتباط الخطي

N of cases : 5      Significance : \* - .01 \*\* - .001

( . ) is printed if a coefficient cannot be computed

والبيانات التالية توضح خطوات ايجاد معامل الارتباط الخطي

للمتغيرين (X) ، (Y) في مثال رقم ( ٧ - ٥ ) .

SPSS/PC : data list free/x y.

SPSS/PC : Begin data.

CASE	#	0	33 18
CASE	#	1	27 20
CASE	#	2	28 22
CASE	#	3	28 27
CASE	#	4	29 21
CASE	#	6	31 27
CASE	#	7	33 29
CASE	#	8	35 28
CASE	#	9	36 29
CASE	#	10	end data.

بيانات المثال رقم ( ٧ - ٥ )

SPSS/PC has written 10 cases to the active file



SPSS/PC : correlation variables = x y.

ثم نضغط زر الإدخال فنحصل على :

Correlations:	X	Y
X	1.000	.4412
Y	.4412	1.0000

N of cases : 10 Significance : \* -.01 \*\* -.001

( . ) is printed if a coefficient cannot be computed

### \* تحليل الانحدار الخطي :

بالنسبة لتحليل الانحدار الخطي البسيط والمتعدد فيتم باستعمال الأمر (Regressions) وتحدد المتغيرات باستخدام العبارة ( = Variables ) ثم ندخل جميع المتغيرات المراد استخدامها في التحليل ثم نحدد المتغير التابع (Dependent Variable) وذلك باستخدام العبارة ( = /Dependent ) ونحدد بعدها اسم المتغير التابع حيث يجب أن يكون ضمن المتغيرات المحددة في العبارة ( = Variables ) السابقة ثم نحدد بعد ذلك طريقة تكوين النموذج الخطي ضمن الطرق المعروفة في تحليل الانحدار وما يهمنا في هذا الكتاب هي طريقة واحدة فقط والتي تستخدم جميع المتغيرات المستقلة (Independent Variables) حيث نحددها باستخدام العبارة (Method = Enter) ، يتبعها أسماء المتغيرات المستقلة المستخدمة في نموذج الانحدار الخطي حيث يجب أن تكون هذه المتغيرات ضمن المتغيرات المذكورة في العبارة ( = Variables ) وبذلك فإن أمر الانحدار الخطي للمتغير (ص) على (س) ( Y على X ) للمثال رقم ( ٨ - ١ ) هو كما يلي :

SPSS/PC : regression variables = x y/dependent = y/method = enter x.

والشكل التالي يوضح جميع خطوات تعريف وإدخال بيانات المثال رقم ( ٨ - ١ ) وكذلك نتائج الارتباط الخطي البسيط بين ( Y ) و ( X ) وكذلك نتائج أمر الانحدار الخطي البسيط بين ( Y ) و ( X ) والتي تأخذ الصورة الخطية :

$$\hat{Y} = a + bX$$

أو  $\hat{Y} = a + bX$

SPSS/PC : data list free/ x y.

SPSS/PC : begin data.

CASE	#	0	11 19	
CASE	#	1	7 11	
CASE	#	2	15 16	
CASE	#	3	9 15	
CASE	#	4	6 10	
CASE	#	5	8 8	
CASE	#	6	9 7	← بيانات المثال رقم ( ٨ - ١ )
CASE	#	7	9 12	
CASE	#	8	13 15	
CASE	#	9	13 17	
CASE	#	10	end data.	

SPSS/PC has written 10 cases to the active file

This procedure was completed at 21 :55:35

SPSS/PC : correlation variables = x y.

فنحصل بذلك على معامل الارتباط فقط على النحو التالي :

Correlations:	X	Y	
X	1.0000	.6882	← مصفوفة معاملات
Y	.6882	1.0000	الارتباط الخطي

N of cases : 10 Significance: \* - .01 \*\* - .001

( . ) is printed if a coefficient cannot be computed

أما إذا أردنا تقدير نموذج الانحدار الخطي نستخدم المنهج التالي :

SPSS/PC : Regressions Variables = x y/ dependent = y/method = enter x.

## MULTIPLE REGRESSION

Listwise Deletion of Missing Data

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y

Beginning Block Number 1. Method: Enter X

## MULTIPLE REGRESSION

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y

Variable(s) Entered on Step Number

1.. X

Multiple R	.68825	←	معامل الارتباط الكلي
R Square	.47368	←	معامل التحديد (ر <sup>2</sup> )
Adjusted R Square	.40789		
Standard Error	3.07794		

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	68.21053	68.21053
Residual	8	75.78947	9.47368

F = 7.20000 Signif F = .0278

## MULTIPLE REGRESSION

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y

### Variables in the Equation

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X	.94737 (ب)	.35306	.68825	2.683	.0278
(Constant)	3.52632 (أ)	3.66234		.963	.3638

End Block Number 1 All requested variables entered.

This procedure was completed at 22: 09: 43

حيث : أ = ٣,٥٢٦٣٢ والخطأ المعياري لـ أ = ٣,٦٦٢٣٤  
 ب = ٠,٩٤٧٤٧ والخطأ المعياري لـ ب = ٠,٣٥٣٠٦

وعليه فإن معادلة الانحدار الخطي البسيط تصبح :

$$\text{ض} = ٩٤٧٤٧ + ٣,٥٢٦٣٢ \text{ س}$$

أما النموذج الخطي المتعدد للمثال (٨ - ٦) والمكون من ثلاثة متغيرات س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub> (أو Y ، X<sub>1</sub> ، X<sub>2</sub>) حيث قدرنا معادلة خط انحدار (س) على كل من س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> بالمعادلة :

$$\text{ض} = \text{أ} + \text{ب}_١ \text{ س}_١ + \text{ب}_٢ \text{ س}_٢$$

$$\hat{Y} = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 \quad \text{أو النموذج :}$$

فيمكن ادخال بيانات هذا النموذج وتقديره بالمخططات التالية والتي تظهر المتغير (Y) كمتغير تابع والمتغيرين X<sub>1</sub> و X<sub>2</sub> كمتغيرين مستقلين :

SPSS/PC : data list free/y x1 x2.

SPSS/PC : begin data.

CASE	#	0	6 7 23	
CASE	#	1	4 5 22	
CASE	#	2	10 9 19	
CASE	#	3	9 10 24	
CASE	#	5	5 7 25	← بيانات المتغيرات الثلاثة
CASE	#	6	2 4 22	
CASE	#	7	8 8 19	
CASE	#	8	4 2 24	
CASE	#	9	10 9 21	
CASE	#	10	end data.	في المثال (٨ - ٦)

SPSS/PC has written 10 cases to the active file

إذا أردنا حساب معاملات الارتباط بين المتغيرات الثلاثة نستخدم المنهج التالي :  
SPSS/PC : correlation variables = y x1 x2.

Correlationx:	Y	X1	X2	مصفوفة معاملات
Y	1.0000	.8730**	-.4674	
X1	.8730**	1.0000	-.3252	الارتباط الخطي
X2	-.4674	-.3252	1.0000	

N of cases : 10 Significance: \*.01 \*\*.001

( . ) is printed if a coefficient cannot be computed

أما إذا أردنا تقدير معادلة خط الانحدار المتعدد نستخدم المنهج التالي :

SPSS/PC : regression variables = y x1 x2/dependent / y/method = enter x1 x2.

ثم نضغط زر الادخال فنحصل على النتائج التالية :

#### MULTIPLE REGRESSION

Listwise Deletion of Missing Data

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y

Beginning Block Number 1. Method: Enter X1 X2

#### MULTIPLE REGRESSION

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y

Variable(s) Entered on Step Number

1.. X2

2.. X1

Multiple R	.89428	معامل الارتباط الكلي
R Square	.79974	معامل التحديد
Adjusted R Square	.74252	
Standard Error	1.39989	

#### Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	54.78212	27.39106
Residual	7	13.71788	1.95970

F = 13.97718 Signif F = .0036

## MULTIPLE REGRESSION

Equation Number 1    Dependent Variable.. Y

Variables in the Equation

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X2	-.27967	.24370	-.20526	-1.148	.2888
X1	.88459	.19625	.80622	4.507	.0028
(Constant)	6.57696	5.98148		1.100	.3079

End Block Number 1    All requested variables entered.

This procedure was completed at 22 : 14 : 06

حيث :

$$أ = ٦,٥٧٦٩٦$$

$$ب١ = ٠,٨٨٤٥٩ \quad \text{الخطأ المعياري لـ ب١} = ٠,١٩٦٢٥$$

$$ب٢ = ٠,٢٧٩٦٧ \quad \text{الخطأ المعياري لـ ب٢} = ٠,٢٤٣٧٠$$

ومن ثم فإن معادلة خط انحدار (ص) على (س١ ، س٢) تؤول إلى :

$$\text{ص} = ٦,٥٧٦٩٦ + ٠,٨٨٤٥٩ \text{ س١} - ٠,٢٧٩٦٧ \text{ س٢}$$

بعد اجراء جميع التحليلات الاحصائية المطلوبة يمكن انتهاء برنامج

( + SPSS/PC ) وذلك باستخدام أمر الانهاء (Fin.) كما هو موضح أدناه :

SPSS/PC : Fin.

End of session. Please rememner your KEY DISKETTE.

العرض السابق لبعض استخدامات برنامج (SPSS/PC+) على جهاز

شخص من نوع (IBM-PC) ، غير أنه يمكن استخدام البرنامج السابق في

عمليات احصائية أخرى مثل تحليل السلاسل الزمنية واختبارات الفروض

الاحصائية وتحليل التباين وغيرها من الأساليب الاحصائية المعروفة . كذلك

يمكن استخدام برنامج (SPSS) بسهولة أيضاً على الحاسبات الكبيرة  
(Main Frames) .

يتضح من عرضنا في هذا الفصل لنوعين من البرامج الجاهزة سهولة  
استخدام هذه البرامج في تحليل البيانات الاحصائية إلا أننا يجب علينا  
التأكيد على أهمية استشارة المتخصصين في الاحصاء وذلك لاختيار المنهج  
المناسب في التحليل وتفسير النتائج التي نحصل عليها .





ملحق  
الجدول الاحصائية



جدول ١١

جدول ساعات المنحنى الطبيعي المعياري

ي	٠.٠٠	٠.٠١	٠.٠٢	٠.٠٣	٠.٠٤	٠.٠٥	٠.٠٦	٠.٠٧	٠.٠٨	٠.٠٩
٠.٠	٠.٠٠٠٠	٠.٠٠٤٠	٠.٠٠٨٠	٠.٠١٢٠	٠.٠١٥٩	٠.٠١٩٩	٠.٠٢٣٩	٠.٠٢٧٩	٠.٠٣١٩	٠.٠٣٥٩
٠.١	٠.٠٣٩٨	٠.٠٤٣٨	٠.٠٤٧٨	٠.٠٥١٧	٠.٠٥٥٧	٠.٠٥٩٦	٠.٠٦٣٦	٠.٠٦٧٥	٠.٠٧١٤	٠.٠٧٥٣
٠.٢	٠.٠٧٩٣	٠.٠٨٣٢	٠.٠٨٧١	٠.٠٩١٠	٠.٠٩٤٨	٠.٠٩٨٧	٠.١٠٢٦	٠.١٠٦٤	٠.١١٠٣	٠.١١٤١
٠.٣	٠.١١٧٩	٠.١٢١٧	٠.١٢٥٥	٠.١٢٩٣	٠.١٣٣١	٠.١٣٦٨	٠.١٤٠٦	٠.١٤٤٣	٠.١٤٨٠	٠.١٥١٧
٠.٤	٠.١٥٥٤	٠.١٥٩١	٠.١٦٢٨	٠.١٦٦٤	٠.١٧٠٠	٠.١٧٣٦	٠.١٧٧٢	٠.١٨٠٨	٠.١٨٤٤	٠.١٨٧٩
٠.٥	٠.١٩١٥	٠.١٩٥٠	٠.١٩٨٥	٠.٢٠١٩	٠.٢٠٥٤	٠.٢٠٨٨	٠.٢١٢٢	٠.٢١٥٧	٠.٢١٩٠	٠.٢٢٢٤
٠.٦	٠.٢٢٥٧	٠.٢٢٩١	٠.٢٣٢٤	٠.٢٣٥٧	٠.٢٣٨٩	٠.٢٤٢٢	٠.٢٤٥٤	٠.٢٤٨٦	٠.٢٥١٨	٠.٢٥٤٩
٠.٧	٠.٢٥٨٠	٠.٢٦١٢	٠.٢٦٤٢	٠.٢٦٧٣	٠.٢٧٠٤	٠.٢٧٣٤	٠.٢٧٦٤	٠.٢٧٩٤	٠.٢٨٢٣	٠.٢٨٥٢
٠.٨	٠.٢٨٨١	٠.٢٩١٠	٠.٢٩٣٩	٠.٢٩٦٧	٠.٢٩٩٥	٠.٣٠٢٣	٠.٣٠٥١	٠.٣٠٧٨	٠.٣١٠٦	٠.٣١٣٣
٠.٩	٠.٣١٥٩	٠.٣١٨٦	٠.٣٢١٢	٠.٣٢٣٨	٠.٣٢٦٤	٠.٣٢٨٩	٠.٣٣١٥	٠.٣٣٤٠	٠.٣٣٦٥	٠.٣٣٨٩
١.٠	٠.٣٤١٣	٠.٣٤٣٨	٠.٣٤٦١	٠.٣٤٨٥	٠.٣٥٠٨	٠.٣٥٣١	٠.٣٥٥٤	٠.٣٥٧٧	٠.٣٥٩٩	٠.٣٦٢١
١.١	٠.٣٦٤٣	٠.٣٦٦٥	٠.٣٦٨٦	٠.٣٧١٨	٠.٣٧٣٩	٠.٣٧٥٩	٠.٣٧٧٠	٠.٣٧٩٠	٠.٣٨١٠	٠.٣٨٣٠
١.٢	٠.٣٨٤٩	٠.٣٨٦٩	٠.٣٨٨٨	٠.٣٩٠٧	٠.٣٩٢٥	٠.٣٩٤٤	٠.٣٩٦٢	٠.٣٩٨٠	٠.٣٩٩٧	٠.٤٠١٥
١.٣	٠.٤٠٣٣	٠.٤٠٤٩	٠.٤٠٦٦	٠.٤٠٨٣	٠.٤٠٩٩	٠.٤١١٥	٠.٤١٣١	٠.٤١٤٧	٠.٤١٦٢	٠.٤١٧٧
١.٤	٠.٤١٩٢	٠.٤٢٠٧	٠.٤٢٢٢	٠.٤٢٣٦	٠.٤٢٥١	٠.٤٢٦٥	٠.٤٢٧٩	٠.٤٢٩٢	٠.٤٣٠٦	٠.٤٣٢١
١.٥	٠.٤٣٣٢	٠.٤٣٤٥	٠.٤٣٥٧	٠.٤٣٧٠	٠.٤٣٨٢	٠.٤٣٩٤	٠.٤٤٠٦	٠.٤٤١٨	٠.٤٤٣٠	٠.٤٤٤١
١.٦	٠.٤٤٥٢	٠.٤٤٦٣	٠.٤٤٧٤	٠.٤٤٨٥	٠.٤٤٩٥	٠.٤٥٠٥	٠.٤٥١٥	٠.٤٥٢٥	٠.٤٥٣٥	٠.٤٥٤٥
١.٧	٠.٤٥٥٤	٠.٤٥٦٤	٠.٤٥٧٣	٠.٤٥٨٢	٠.٤٥٩١	٠.٤٥٩٩	٠.٤٦٠٨	٠.٤٦١٦	٠.٤٦٢٥	٠.٤٦٣٣
١.٨	٠.٤٦٤١	٠.٤٦٤٩	٠.٤٦٥٦	٠.٤٦٦٤	٠.٤٦٧١	٠.٤٦٧٨	٠.٤٦٨٦	٠.٤٦٩٣	٠.٤٦٩٩	٠.٤٧٠٦
١.٩	٠.٤٧١٣	٠.٤٧١٩	٠.٤٧٢٦	٠.٤٧٣٣	٠.٤٧٣٨	٠.٤٧٤٤	٠.٤٧٥٠	٠.٤٧٥٨	٠.٤٧٦٢	٠.٤٧٦٧
٢.٠	٠.٤٧٧٢	٠.٤٧٧٨	٠.٤٧٨٣	٠.٤٧٨٨	٠.٤٧٩٣	٠.٤٧٩٨	٠.٤٨٠٣	٠.٤٨٠٨	٠.٤٨١٢	٠.٤٨١٧
٢.١	٠.٤٨٢١	٠.٤٨٢٦	٠.٤٨٣٠	٠.٤٨٣٤	٠.٤٨٣٨	٠.٤٨٤٢	٠.٤٨٤٦	٠.٤٨٥٠	٠.٤٨٥٤	٠.٤٨٥٧
٢.٢	٠.٤٨٦١	٠.٤٨٦٦	٠.٤٨٦٨	٠.٤٨٧١	٠.٤٨٧٥	٠.٤٨٧٨	٠.٤٨٨١	٠.٤٨٨٤	٠.٤٨٨٧	٠.٤٨٩٠
٢.٣	٠.٤٨٩٢	٠.٤٨٩٦	٠.٤٨٩٨	٠.٤٩٠١	٠.٤٩٠٤	٠.٤٩٠٦	٠.٤٩٠٩	٠.٤٩١١	٠.٤٩١٣	٠.٤٩١٦
٢.٤	٠.٤٩١٨	٠.٤٩٢٠	٠.٤٩٢٢	٠.٤٩٢٥	٠.٤٩٢٧	٠.٤٩٢٩	٠.٤٩٣١	٠.٤٩٣٢	٠.٤٩٣٤	٠.٤٩٣٦
٢.٥	٠.٤٩٣٨	٠.٤٩٤٠	٠.٤٩٤١	٠.٤٩٤٣	٠.٤٩٤٥	٠.٤٩٤٦	٠.٤٩٤٨	٠.٤٩٤٩	٠.٤٩٥١	٠.٤٩٥٣
٢.٦	٠.٤٩٥٣	٠.٤٩٥٥	٠.٤٩٥٦	٠.٤٩٥٧	٠.٤٩٥٩	٠.٤٩٦٠	٠.٤٩٦١	٠.٤٩٦٢	٠.٤٩٦٣	٠.٤٩٦٤
٢.٧	٠.٤٩٦٥	٠.٤٩٦٦	٠.٤٩٦٧	٠.٤٩٦٨	٠.٤٩٦٩	٠.٤٩٧٠	٠.٤٩٧١	٠.٤٩٧٣	٠.٤٩٧٣	٠.٤٩٧٤
٢.٨	٠.٤٩٧٤	٠.٤٩٧٥	٠.٤٩٧٦	٠.٤٩٧٧	٠.٤٩٧٧	٠.٤٩٧٨	٠.٤٩٧٩	٠.٤٩٨٠	٠.٤٩٨٠	٠.٤٩٨١
٢.٩	٠.٤٩٨١	٠.٤٩٨٢	٠.٤٩٨٣	٠.٤٩٨٤	٠.٤٩٨٤	٠.٤٩٨٤	٠.٤٩٨٥	٠.٤٩٨٥	٠.٤٩٨٦	٠.٤٩٨٦
٣.٠	٠.٤٩٨٦	٠.٤٩٨٧	٠.٤٩٨٧	٠.٤٩٨٨	٠.٤٩٨٨	٠.٤٩٨٨	٠.٤٩٨٩	٠.٤٩٨٩	٠.٤٩٨٩	٠.٤٩٩٠

ملاحظة:



الحدود اعلاه يعطي المساحة المظلة  
تحت منحنى التوزيع المتصاد المعياري ما بين  
القيمة " و القيمة ي "

جدول توزیع مربع گامی (قسم هم) =  $\chi^2$  (5, 0)

المساحة هـ	المرتبة الحزبية و	المرتبة الحزبية ز
١٠٠٠	١	١٠٠٠
١٠٠٠	٢	١٠٠٠
١٠٠٠	٣	١٠٠٠
١٠٠٠	٤	١٠٠٠
١٠٠٠	٥	١٠٠٠
١٠٠٠	٦	١٠٠٠
١٠٠٠	٧	١٠٠٠
١٠٠٠	٨	١٠٠٠
١٠٠٠	٩	١٠٠٠
١٠٠٠	١٠	١٠٠٠
١٠٠٠	١١	١٠٠٠
١٠٠٠	١٢	١٠٠٠
١٠٠٠	١٣	١٠٠٠
١٠٠٠	١٤	١٠٠٠
١٠٠٠	١٥	١٠٠٠
١٠٠٠	١٦	١٠٠٠
١٠٠٠	١٧	١٠٠٠



جدول (٢١)  
جدول تولد

درجات الشمس ن	١٠-	١١-	١٢-	١٣-	١٤-	١٥-	١٦-	١٧-
١	١٢٥٠	١٢٧٧	١٢٩٦	١٣١٦	١٣٣٧	١٣٥٨	١٣٧٩	١٣٩٩
٢	١٢٨٩	١٣١٧	١٣٣٦	١٣٥٦	١٣٧٦	١٣٩٦	١٤١٦	١٤٣٥
٣	١٢٩٧	١٣٢٥	١٣٤٥	١٣٦٥	١٣٨٥	١٤٠٥	١٤٢٥	١٤٤٤
٤	١٣٢١	١٣٤٩	١٣٦٩	١٣٨٩	١٤٠٩	١٤٢٩	١٤٤٩	١٤٦٨
٥	١٣٦٧	١٣٩٥	١٤١٥	١٤٣٥	١٤٥٥	١٤٧٥	١٤٩٥	١٥١٤
٦	١٣٦٥	١٣٩٣	١٤١٣	١٤٣٣	١٤٥٣	١٤٧٣	١٤٩٣	١٥١٢
٧	١٣٦٣	١٣٩١	١٤١١	١٤٣١	١٤٥١	١٤٧١	١٤٩١	١٥١٠
٨	١٣٦٢	١٣٩٠	١٤١٠	١٤٣٠	١٤٥٠	١٤٧٠	١٤٩٠	١٥٠٩
٩	١٣٦١	١٣٨٩	١٤٠٩	١٤٢٩	١٤٤٩	١٤٦٩	١٤٨٩	١٥٠٨
١٠	١٣٦٠	١٣٨٨	١٤٠٨	١٤٢٨	١٤٤٨	١٤٦٨	١٤٨٨	١٥٠٧
١١	١٣٦٠	١٣٨٨	١٤٠٨	١٤٢٨	١٤٤٨	١٤٦٨	١٤٨٨	١٥٠٦
١٢	١٣٥٩	١٣٨٧	١٤٠٧	١٤٢٧	١٤٤٧	١٤٦٧	١٤٨٧	١٥٠٥
١٣	١٣٥٩	١٣٨٧	١٤٠٧	١٤٢٧	١٤٤٧	١٤٦٧	١٤٨٧	١٥٠٤
١٤	١٣٥٨	١٣٨٦	١٤٠٦	١٤٢٦	١٤٤٦	١٤٦٦	١٤٨٦	١٥٠٣
١٥	١٣٥٨	١٣٨٦	١٤٠٦	١٤٢٦	١٤٤٦	١٤٦٦	١٤٨٦	١٥٠٢
١٦	١٣٥٨	١٣٨٦	١٤٠٦	١٤٢٦	١٤٤٦	١٤٦٦	١٤٨٦	١٥٠١
١٧	١٣٥٧	١٣٨٥	١٤٠٥	١٤٢٥	١٤٤٥	١٤٦٥	١٤٨٥	١٥٠٠
١٨	١٣٥٧	١٣٨٥	١٤٠٥	١٤٢٥	١٤٤٥	١٤٦٥	١٤٨٥	١٤٩٩
١٩	١٣٥٧	١٣٨٥	١٤٠٥	١٤٢٥	١٤٤٥	١٤٦٥	١٤٨٥	١٤٩٨
٢٠	١٣٥٧	١٣٨٥	١٤٠٥	١٤٢٥	١٤٤٥	١٤٦٥	١٤٨٥	١٤٩٧
٢١	١٣٥٧	١٣٨٥	١٤٠٥	١٤٢٥	١٤٤٥	١٤٦٥	١٤٨٥	١٤٩٦
٢٢	١٣٥٦	١٣٨٤	١٤٠٤	١٤٢٤	١٤٤٤	١٤٦٤	١٤٨٤	١٤٩٥
٢٣	١٣٥٦	١٣٨٤	١٤٠٤	١٤٢٤	١٤٤٤	١٤٦٤	١٤٨٤	١٤٩٤
٢٤	١٣٥٦	١٣٨٤	١٤٠٤	١٤٢٤	١٤٤٤	١٤٦٤	١٤٨٤	١٤٩٣
٢٥	١٣٥٦	١٣٨٤	١٤٠٤	١٤٢٤	١٤٤٤	١٤٦٤	١٤٨٤	١٤٩٢
٢٦	١٣٥٦	١٣٨٤	١٤٠٤	١٤٢٤	١٤٤٤	١٤٦٤	١٤٨٤	١٤٩١
٢٧	١٣٥٦	١٣٨٤	١٤٠٤	١٤٢٤	١٤٤٤	١٤٦٤	١٤٨٤	١٤٩٠
٢٨	١٣٥٦	١٣٨٤	١٤٠٤	١٤٢٤	١٤٤٤	١٤٦٤	١٤٨٤	١٤٨٩
٢٩	١٣٥٦	١٣٨٤	١٤٠٤	١٤٢٤	١٤٤٤	١٤٦٤	١٤٨٤	١٤٨٨
٣٠	١٣٥٦	١٣٨٤	١٤٠٤	١٤٢٤	١٤٤٤	١٤٦٤	١٤٨٤	١٤٨٧
٣١	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٨٦
٣٢	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٨٥
٣٣	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٨٤
٣٤	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٨٣
٣٥	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٨٢
٣٦	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٨١
٣٧	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٨٠
٣٨	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٧٩
٣٩	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٧٨
٤٠	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٧٧
٤١	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٧٦
٤٢	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٧٥
٤٣	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٧٤
٤٤	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٧٣
٤٥	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٧٢
٤٦	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٧١
٤٧	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٧٠
٤٨	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٦٩
٤٩	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٦٨
٥٠	١٣٥٥	١٣٨٣	١٤٠٣	١٤٢٣	١٤٤٣	١٤٦٣	١٤٨٣	١٤٦٧

ملاحظة :



الحدود أعلاه يعني قيمة  $t$   
المقابلة للمساحة المظلمة  $\alpha$ .



شابع جدول رقم (1)

جدول توزيع ل ( مستوى المعنوية = ٥ ٪ )

$\frac{df_1}{df_2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	16.01	19.00	20.00	20.59	20.92	21.15	21.32	21.45	21.55	21.63	21.70	21.76	21.81	21.85	21.88	21.91	21.94	21.96	21.97
2	18.51	21.59	22.59	23.17	23.50	23.73	23.90	24.02	24.12	24.20	24.27	24.32	24.37	24.40	24.43	24.45	24.47	24.48	24.49
3	19.59	22.77	23.76	24.34	24.67	24.90	25.07	25.19	25.28	25.36	25.42	25.47	25.51	25.54	25.57	25.59	25.61	25.62	25.63
4	20.00	23.16	24.15	24.73	25.06	25.29	25.46	25.58	25.67	25.74	25.80	25.85	25.89	25.92	25.94	25.96	25.98	25.99	26.00
5	20.33	23.49	24.48	25.06	25.39	25.62	25.79	25.91	26.00	26.07	26.12	26.17	26.21	26.24	26.26	26.28	26.29	26.30	26.31
6	20.59	23.75	24.74	25.32	25.65	25.88	26.05	26.17	26.26	26.32	26.37	26.42	26.46	26.49	26.51	26.52	26.53	26.54	26.55
7	20.80	23.96	24.95	25.53	25.86	26.09	26.26	26.38	26.47	26.53	26.58	26.63	26.67	26.70	26.72	26.73	26.74	26.75	26.76
8	20.97	24.12	25.11	25.69	26.02	26.25	26.42	26.54	26.63	26.69	26.74	26.79	26.83	26.86	26.88	26.89	26.90	26.91	26.92
9	21.11	24.26	25.25	25.83	26.16	26.39	26.56	26.68	26.77	26.83	26.88	26.93	26.97	27.00	27.02	27.03	27.04	27.05	27.06
10	21.23	24.38	25.37	25.95	26.28	26.51	26.68	26.80	26.89	26.95	27.00	27.05	27.09	27.12	27.14	27.15	27.16	27.17	27.18
12	21.40	24.54	25.53	26.11	26.44	26.67	26.84	26.96	27.05	27.11	27.16	27.21	27.25	27.28	27.30	27.31	27.32	27.33	27.34
15	21.57	24.71	25.70	26.28	26.61	26.84	27.01	27.13	27.22	27.28	27.33	27.38	27.42	27.45	27.47	27.48	27.49	27.50	27.51
20	21.75	24.89	25.88	26.46	26.79	27.02	27.19	27.31	27.40	27.46	27.51	27.56	27.60	27.63	27.65	27.66	27.67	27.68	27.69
24	21.88	25.02	26.01	26.59	26.92	27.15	27.32	27.44	27.53	27.59	27.64	27.69	27.73	27.76	27.78	27.79	27.80	27.81	27.82
30	21.99	25.13	26.12	26.70	27.03	27.26	27.43	27.55	27.64	27.70	27.75	27.80	27.84	27.87	27.89	27.90	27.91	27.92	27.93
40	22.12	25.26	26.25	26.83	27.16	27.39	27.56	27.68	27.77	27.83	27.88	27.93	27.97	28.00	28.02	28.03	28.04	28.05	28.06
60	22.26	25.40	26.39	26.97	27.30	27.53	27.70	27.82	27.91	27.97	28.02	28.07	28.11	28.14	28.16	28.17	28.18	28.19	28.20
120	22.36	25.51	26.50	27.08	27.41	27.64	27.81	27.93	28.02	28.08	28.13	28.18	28.22	28.25	28.27	28.28	28.29	28.30	28.31
$\infty$	22.39	25.54	26.53	27.11	27.44	27.67	27.84	27.96	28.05	28.11	28.16	28.21	28.25	28.28	28.30	28.31	28.32	28.33	28.34



ملاحظة :

الجدول أعلاه يعطى القيمة ل عند مستوى المعنوية ٥ ٪  
 المناظرة لدرجات الحرية  $n - 1$  .



2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

سابع جدول (14)

جدول توزيع ف ( مستوى المعنوية 0.01 )

	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400	410	420	430	440	450	460	470	480	490	500	510	520	530	540	550	560	570	580	590	600	610	620	630	640	650	660	670	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790	800	810	820	830	840	850	860	870	880	890	900	910	920	930	940	950	960	970	980	990	1000																																																																															
1	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500	505	510	515	520	525	530	535	540	545	550	555	560	565	570	575	580	585	590	595	600	605	610	615	620	625	630	635	640	645	650	655	660	665	670	675	680	685	690	695	700	705	710	715	720	725	730	735	740	745	750	755	760	765	770	775	780	785	790	795	800	805	810	815	820	825	830	835	840	845	850	855	860	865	870	875	880	885	890	895	900	905	910	915	920	925	930	935	940	945	950	955	960	965	970	975	980	985	990	995	1000
2	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500	505	510	515	520	525	530	535	540	545	550	555	560	565	570	575	580	585	590	595	600	605	610	615	620	625	630	635	640	645	650	655	660	665	670	675	680	685	690	695	700	705	710	715	720	725	730	735	740	745	750	755	760	765	770	775	780	785	790	795	800	805	810	815	820	825	830	835	840	845	850	855	860	865	870	875	880	885	890	895	900	905	910	915	920	925	930	935	940	945	950	955	960	965	970	975	980	985	990	995	1000
3	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500	505	510	515	520	525	530	535	540	545	550	555	560	565	570	575	580	585	590	595	600	605	610	615	620	625	630	635	640	645	650	655	660	665	670	675	680	685	690	695	700	705	710	715	720	725	730	735	740	745	750	755	760	765	770	775	780	785	790	795	800	805	810	815	820	825	830	835	840	845	850	855	860	865	870	875	880	885	890	895	900	905	910	915	920	925	930	935	940	945	950	955	960	965	970	975	980	985	990	995	1000
4	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500	505	510	515	520	525	530	535	540	545	550	555	560	565	570	575	580	585	590	595	600	605	610	615	620	625	630	635	640	645	650	655	660	665	670	675	680	685	690	695	700	705	710	715	720	725	730	735	740	745	750	755	760	765	770	775	780	785	790	795	800	805	810	815	820	825	830	835	840	845	850	855	860	865	870	875	880	885	890	895	900	905	910	915	920	925	930	935	940	945	950	955	960	965	970	975	980	985	990	995	1000
5	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500	505	510	515	520	525	530	535	540	545	550	555	560	565	570	575	580	585	590	595	600	605	610	615	620	625	630	635	640	645	650	655	660	665	670	675	680	685	690	695	700	705	710	715	720	725	730	735	740	745	750	755	760	765	770	775	780	785	790	795	800	805	810	815	820	825	830	835	840	845	850	855	860	865	870	875	880	885	890	895	900	905	910	915	920	925	930	935	940	945	950	955	960	965	970	975	980	985	990	995	1000
6	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500	505	510	515	520	525	530	535	540	545	550	555	560	565	570	575	580	585	590	595	600	605	610	615	620	625	630	635	640	645	650	655	660	665	670	675	680	685	690	695	700	705	710	715	720	725	730	735	740	745	750	755	760	765	770	775	780	785	790	795	800	805	810	815	820	825	830	835	840	845	850	855	860	865	870	875	880	885	890	895	900	905	910	915	920	925	930	935	940	945	950	955	960	965	970	975	980	985	990	995	1000
7	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500	505	510	515	520	525	530	535	540	545	550	555	560	565	570	575	580	585	590	595	600	605	610	615	620	625	630	635	640	645	650	655	660	665	670	675	680	685	690	695	700	705	710	715	720	725	730	735	740	745	750	755	760	765	770	775	780	785	790	795	800	805	810	815	820	825	830	835	840	845	850	855	860	865	870	875	880	885	890	895	900	905	910	915	920	925	930	935	940	945	950	955	960	965	970	975	980	985	990	995	1000
8	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500	505	510	515	520	525	530	535	540	545	550	555	560	565	570	575	580	585	590	595	600	605	610	615	620	625	630	635	640	645	650	655	660	665	670	675	680	685	690	695	700	705	710	715	720	725	730	735	740	745	750	755	760	765	770	775	780	785	790	795	800	805	810	815	820	825	830	835	840	845	850	855	860	865	870	875	880	885	890	895	900	905	910	915	920	925	930	935	9												

## المراجع

فيما يلي قائمة بأسماء بعض الكتب والمراجع في الاحصاء الوصفي والتحليلي، والقائمة مرتبة ترتيباً أبجدياً حسب أسماء المؤلفين :

أولاً : المراجع العربية :

\* د. أحمد عباده سرحان

طرق التحليل الاحصائي - دار المعارف - مصر - ١٩٦٣ .

\* د. أحمد محمد عمر ، د. عبد اللطيف عبدالفتاح

مقدمة الطرق الاحصائية - مطبعة التقدم - القاهرة - ١٩٧٨

\* اسماعيل العوامري

مبادئ الاحصاء - مكتبة عين شمس - ١٩٨١

\* د. سمير كامل عاشور

مقدمة في الاحصاء الوصفي والتحليلي - معهد الاحصاء -

القاهرة ١٩٨٠

\* د. عبدالمجيد فراج

الأسلوب الاحصائي - دار النهضة العربية - مصر - ١٩٧١ .

## ثانياً : المراجع الأجنبية

- \* **Freund, J. E.**  
Modern elementary statistics, 5<sup>th</sup> edition, Prentice/Hall, 1979.
- \* **Sincich, T.**  
Statistics by examples, Dellen publishing company, San-Francisco, 1985.
- \* **Mansfield, E.**  
Basic statistics with applications, W. W. Norton and company, New York, 1986.
- \* **Matie. J. Q. and Gilbereath, G. H.**  
Statistics for Business and Economics, Business publication, Dallas, U. S. A., 1980.
- \* **Mendenhall, W. and Sincich, T.**  
A second course in Business statistics, Dellen publishing Company, San Francisco, 1986.
- \* **Walpole, R. E.**  
Introduction to Statistics, second edition, Macmillan publishing Co., Inc., New York, 1974.



Bibliotheca Alexandrina



0331613

شركة مطابع الوزارات الصحفية ديم

٤٧٤٧٣٧٤ - ٤٧٣١٩٦٤